

Lycée Tahar Sfar Mahdia	Devoir de contrôle n° 1 Mathématiques	Niveau : 3 ^{ème} Math
Date : 07 / 11 / 2016	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (7 pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{2(x+1)} & \text{si } x < -1 \\ (m-1)x^3 + (5-m^2)x + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 ; m \in \mathbb{R} \\ \frac{x}{4(\sqrt{x+4} - 2)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, f est continue en 0.
- 2) Déterminer les valeurs de m pour que f soit continue en (-1) .

Dans la suite de l'exercice, on prend $m = 2$.

- 3) a/ Montrer que f est strictement croissante sur $[-1 ; 0]$.
b/ Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet dans $[-1 ; 0]$ une solution unique α .
c/ Donner un encadrement de α d'amplitude 0,5.
d/ Vérifier que $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha} = -1$.
e/ Montrer que, pour tout $x \in [-1 ; 0]$, on a : $f(x) = (x - \alpha) \left(x^2 + \alpha x - \frac{1}{\alpha} \right)$.

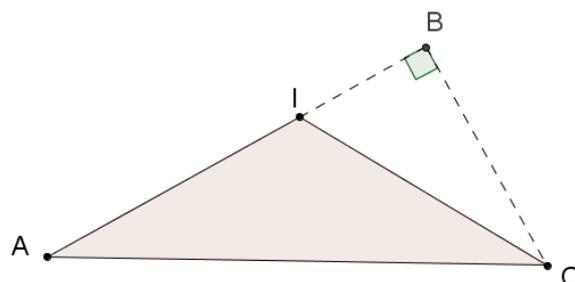
- 4) Soit g la fonction définie sur $[-1 ; 0] \setminus \{\alpha\}$ par : $g(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x - \alpha}$.

Montrer que g est prolongeable par continuité en α et déterminer ce prolongement.

Exercice n°2 : (8 pts)

Soit AIC un triangle isocèle en I tel que $IA = a$, ($a > 0$) et $\widehat{AIC} = \frac{2\pi}{3}$. B est le projeté orthogonal de C sur (AI) .

- 1) a/ Montrer que $AC^2 = IA^2 + IC^2 - 2\overline{IA} \cdot \overline{IC}$.
b/ Calculer alors AC en fonction de a .
c/ Calculer, en fonction de a , les distances BI et BC .
- 2) Soit D le point tel que $ABCD$ est un rectangle.



a/ Montrer que $\overline{CI} \cdot \overline{CB} = \frac{3a^2}{4}$.

b/ Montrer que $\overline{CI} \cdot \overline{CD} = \overline{CI} \cdot \overline{CA} - \overline{CI} \cdot \overline{CB}$, en déduire que $\overline{CI} \cdot \overline{CD} = \frac{3a^2}{4}$.

c/ Montrer que les droites (CI) et (BD) sont perpendiculaires.

3) Soit l'ensemble $\Delta = \{M \in P \text{ tels que } MA^2 - MI^2 = 2a^2\}$.

a/ Vérifier que $C \in \Delta$.

b/ Soit O le milieu de $[AI]$, montrer que, pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 - MI^2 = 2\overline{OM} \cdot \overline{AI}.$$

c/ Montrer que Δ est une droite que l'on précisera.

4) Soit l'ensemble $\Gamma = \left\{M \in P \text{ tels que } MA^2 + 2MB^2 = \frac{9a^2}{2}\right\}$.

a/ Vérifier que $C \in \Gamma$.

b/ Vérifier que I est le barycentre des points pondérés $(A ; 1)$ et $(B ; 2)$.

c/ Montrer que, pour tout point M du plan, on a : $MA^2 + 2MB^2 = 3MI^2 + \frac{3a^2}{2}$.

d/ Montrer que Γ est un cercle que l'on précisera.

Exercice n°3 : (5 pts)

Le plan est orienté dans le sens direct.

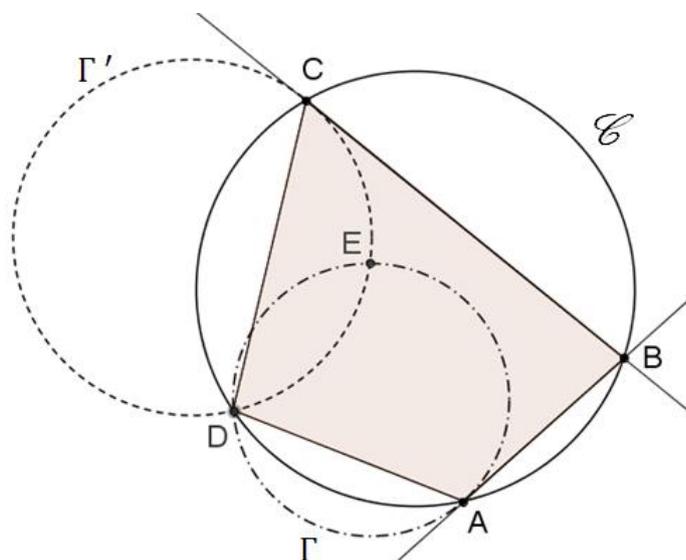
Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle \mathcal{C} , on désigne par Γ le cercle passant par D et tangent à (AB) en A , et par Γ' le cercle passant par D et tangent à (CB) en C . Γ et Γ' se recoupent en E .

1) Comparer en justifiant $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE})$ puis $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE})$ et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE})$.

2) a/ Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB}) \equiv \pi + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) [2\pi]$.

b/ En déduire que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CE}) + \pi [2\pi]$.

c/ En déduire que $E \in [AC]$.



Bonne chance