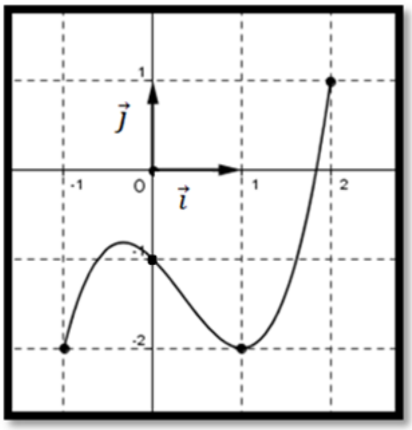
Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 1** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math
Date : 09 /11 / 2013	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (8 pts)

A- on donne sur la figure ci-contre la courbe représentative, dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, d'une fonction g définie sur $[-1;2]$ par : $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$, où a, b et c sont trois réels.



1) Par lecture graphique, déterminer :

$a/$ $g\left(]-1;2]\right)$.

$b/$ Le nombre de solutions de chacune des équations : $g(x)=0$ et $g(x)=-1$.

$c/$ Les réels a, b et c.

2) On désigne par α la solution de l'équation : $g(x)=0$.

Donner un encadrement de α d'amplitude $0,5$.

B- Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}-2} & si\ x<-1 \\ g(x) & si\ -1\le x\le 2 \\ \sqrt{x^2-x+2}+mx & si\ x>2 \end{cases}$$ où m est un réel.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Montrer que f est continue en (-1).

2) Déterminer le réel m pour que f soit continue en 2.

Dans la suite de l'exercice, on pose $m=-\dfrac{1}{2}$.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat.

4) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

5) $a/$ Montrer que, pour tout $x>0$. On a : $\sqrt{x^2-x+2}-x=\dfrac{\left(-1+\dfrac{2}{x}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1}$.

Puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+2}-x$.

$b/$ En déduire que la droite Δ d'équation : $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ est une asymptote de C_f au voisinage de $(+\infty)$.

Exercice n°2 : *(8 pts)*

Etant donné un quadrilatère $ABCD$. On se propose de déterminer l'ensemble Δ des points M du plan vérifiant la propriété: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

1) Montrer l'équivalence:

$$(\, M \in \Delta \,)\ si, et\ seulement\ si\ (\, MI^2 - MJ^2 = AI^2 - BJ^2 \,).$$

2) En déduire l'ensemble Δ dans chacun des sas suivants :

   $a/$ $ABCD$ est un rectangle.

   $b/$ $ABCD$ est un parallélogramme non rectangle.

3) Dans cette question, $ABCD$ n'est pas un parallélogramme, soit O le milieu de $[IJ]$.

   $a/$ Montrer que, pour tout point M du plan, on a : $MI^2 - MJ^2 = 2\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OH}$, où H est le projeté orthogonal de M sur (IJ).

   $b/$ On pose $k = AI^2 - BJ^2$, déduire de ce qui précède que :

   $$(\ M \in \Delta\ )\ \text{si, et seulement si}\ \left(\ OH = \frac{|k|}{2IJ}\ \right).$$

   $c/$ Montrer alors que Δ est une droite perpendiculaire à (IJ).

4) $ABCD$ est toujours n'est pas un parallélogramme, et on suppose en outre que les sommets A, B, C et D sont situés sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon R et que (AC) et (BD) se coupent en E.

   $a/$ Montrer que : $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EA'}$, où A' est le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$.

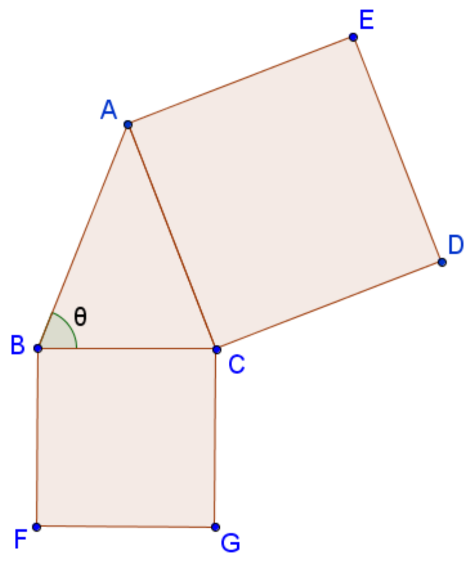
   $b/$ En déduire que : $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC} = \Omega E^2 - R^2$.

   $c/$ Montrer que : $E \in \Delta$, puis construire Δ.

Exercice n°3 : *(4 pts)*

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC isocèle de sommet principale A tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv \theta[2\pi]$. où θ est un réel.

On construit à l'extérieur du triangle ABC les carrés $ACDE$ et $CBFG$.



$a/$ Exprimer, en fonction de θ, les mesures de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{EA})$.

$b/$ Montrer que : $2\left(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} + 2\theta[2\pi]$.

$c/$ Montrer que les droites (BE) et (CF) sont parallèles.

Bonne chance