Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 1** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math
Date : 06 / 11 / 2017	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (7 pts)

1) Soit g la fonction définie par $g(x)=\sqrt{x^2+x-2}-x$.

On désigne par C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

$a/$ Déterminer le domaine de définition de g.

$b/$ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

$c/$ Montrer que, pour tout $x\geq 1$, $g(x)=\dfrac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1}$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Donner une interprétation géométrique de cette limite.

$d/$ Montrer que la droite $\Delta: y=-2x-\dfrac{1}{2}$ est une asymptote de C_g au voisinage de $-\infty$.

2) Soit f la fonction définie sur IR par: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3(m-1)x-3m+2}{x-1} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{g(x)}{x-2} & \text{si } x\geq 1 \text{ et } x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{1}{4} & \end{cases}$

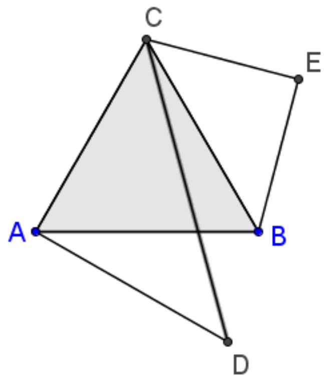
$a/$ Montrer que f est continue en 2.

$b/$ Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3m-1$.

$c/$ Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en 1.

3) Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{4}x$ admet dans $[1\,,\,2]$ au moins une solution α.

Exercice n°2 : (3 pts)



Le plan est orienté dans le sens direct.

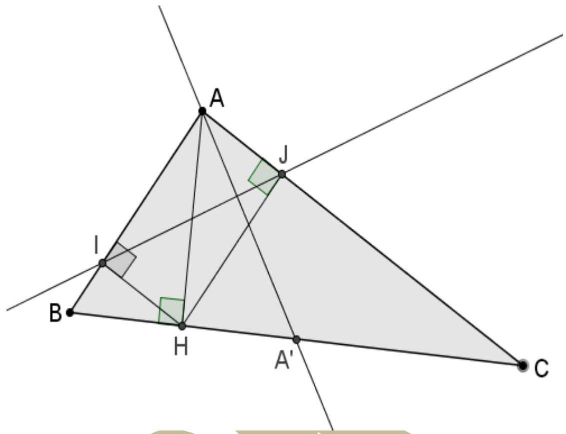
Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$, ADC et ECB sont deux triangles rectangles et isocèles directs en A et E.

1) Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{EC})$.

2) $a/$ Montrer que : $2(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD}})\equiv\dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$.

$b/$ En déduire que les points E, B et D sont alignés.

Exercice n°3 : *(6 pts)*



Soit ABC est un triangle rectangle en A, A' est le milieu de $[BC]$ et H est le pied de la hauteur issue de A, on appelle I et J les projetés orthogonaux de H respectivement sur (AB) et (AC).

1) $a/$ Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   $b/$ Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ et que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$.

   $c/$ En déduire que les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires.

2) On suppose dans la suite de l'exercice que $AB = a$, $a > 0$ et $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{3}$.

   $a/$ Montrer que le triangle ABA' est équilatéral.

   $b/$ Calculer en fonction de a les distances AH et AC.

3) On considère l'ensemble $\mathscr{C} = \{M \in P \text{ tels que } 3MB^2 + MC^2 = 6a^2\}$.

   $a/$ Vérifier que H est le barycentre des points pondérés $(B,3)$ et $(C,1)$.

   $b/$ Montrer que, pour tout point M du plan, on a : $3MB^2 + MC^2 = 4MH^2 + 3a^2$.

   $c/$ Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{C}$.

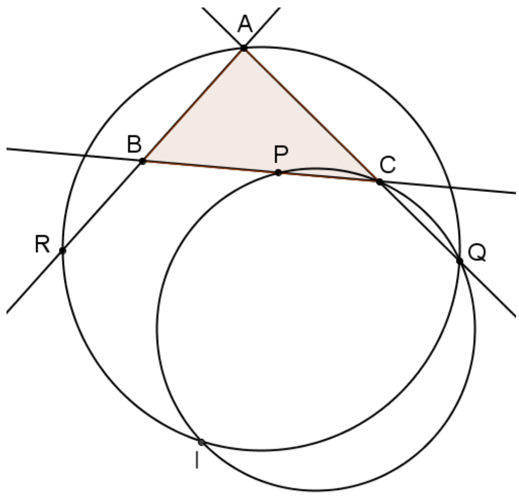
4) On considère l'ensemble $\Delta = \{M \in P \text{ tels que } MB^2 - MC^2 = -2a^2\}$.

   $a/$ Calculer $\overrightarrow{A'H}.\overrightarrow{BC}$.

   $b/$ Montrer que pour tout point M du plan, on a : $MB^2 - MC^2 = 2\overrightarrow{A'M}.\overrightarrow{BC}$.

   $c/$ Déterminer alors l'ensemble Δ.

Exercice n°4 : *(4 pts)*



Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle. P, Q et R sont trois points pris respectivement sur (BC), (AC) et (AB) et tous distincts de A, B et C. les cercles circonscrits aux triangles CPQ et AQR se coupent en I.

1) $a/$ Montrer que : $2\left(\widehat{\overrightarrow{RB};\overrightarrow{RI}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{QA};\overrightarrow{QI}}\right)\ [2\pi]$ et que $2\left(\widehat{\overrightarrow{PB};\overrightarrow{PI}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{QC};\overrightarrow{QI}}\right)\ [2\pi]$.

   $b/$ En déduire que B, P, R et I sont cocycliques.

2) $a/$ Montrer que : $2\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IC}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{RA};\overrightarrow{RQ}}\right) + 2\left(\widehat{\overrightarrow{PQ};\overrightarrow{PC}}\right)\ [2\pi]$.

   $b/$ En déduire que : $2\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IC}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right) + 2\left(\widehat{\overrightarrow{QP};\overrightarrow{QR}}\right)\ [2\pi]$.

   $c/$ En déduire que A, B, C et I sont cocycliques si, et seulement si, P, Q et R sont alignés.