Exercice N° 1:

Soit la fonction $f : x \longrightarrow x + \sqrt{1+x^2}$

1)Etudier les variations de f.

2)Montrer que f admet une application réciproque f^{-1} dont on étudiera les variations .

3) Calculer $x - \sqrt{x^2+1}$ en fonction de $f(x)$. en déduire l'expression de $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

Exercice N° 2:

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1) Etudier les variations de f.

2Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution $\in\ ]1,2[$.

3) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera . Définir la fonction réciproque f^{-1} .

Exercice N° 3:

Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$par

$$f(x) = tg\pi x - \pi x + 1$$

1) Etudier les variations de f.

2) Montrer que f réalise une bijection de $\left]\frac{-1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on déterminera.

Soit g la bijection réciproque de f .

Etudier la continuité et la dérivabilité de g . Calculer $g'\left(2-\frac{\pi}{4}\right)$.

3) a) Montrer qu'il existe un seul réel α de $\left]-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right[$ tel que : $f(\alpha) = 0$.

b) Dresser le tableau de signe de $f(x)$

4) Soit la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{\pi x - 1}{\pi \sin \pi x}\ ;\quad x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \backslash \{0\}.$$

Etudier les variations de h.

Préciser $h'_g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $h'_d\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Exercice N° 4:

Soit la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$par :

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

1) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur un intervalle I que l'on déterminera et calculer $(f^{-1})'(x)$.

3) Soit $g(x) = f^{-1}(1+\cos^2 x)$

. a) déterminer l'ensemble de définition de g

b) étudier la dérivabilité de g et donner $g'(x)$

Exercice N° 5:

Soit la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = sinx$

a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur : $[-1, 1]$

Calculer : $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

b) Si $a \in [-1, 1]$;

Calculer : $f^{-1}(a) + f^{-1}(-a)$.

c) Si $x \in [-1, 1]$; Calculer :

$sin[f^{-1}(x)]$ et $cos[f^{-1}(x)]$.

2) Soit la fonction g définie sur $[0, \pi]$ par : $g(x) = cosx$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} . Déterminer $D_{g^{-1}}$

b) Si $x \in D_{g^{-1}}$; Calculer :

$cos[g^{-1}(x)]$ et $sin[g^{-1}(x)]$

c)Montrer que : $\forall\, x \in D_{g^{-1}}$;

$$g^{-1}(x) = \pi - g^{-1}(-x)$$

d) Soit $a \in [-1, 1]$. Exprimer à l'aide de $g^{-1}(a)$ toutes les solutions de l'équation : $cosx = a$

3) a) Montrer que : $\forall\, x \in [-1, 1]$;

$0 \leq \frac{\pi}{2} - f^{-1}(x) \leq \pi$

b) Calculer : $cos\left[\frac{\pi}{2} - f^{-1}(x)\right]$

c) Montrer que : $\forall\, x \in [-1, 1]$;

$f^{-1}(x) + g^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

Exercice N° 6:

Soit la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \frac{1}{1+sinx}$

1) Soit la fonction φ définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\varphi(x) = \frac{1-x}{x} - sinx$.

a) 1)Etudier les variations de φ.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

3) a) Soit $x \in J$.

Exprimer $sin[f^{-1}(x)]$ et $cos[f^{-1}(x)]$ En fonction de x.

b) En déduire : $f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ et $f^{-1}(2 - \sqrt{2})$

c) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Calculer : $f^{-1}\left(\frac{1}{1+cosx}\right)$

Exercice N° 7:

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $E(x)$ la partie

Entière de . On considère les deux

fonctions :

$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] : x \longrightarrow x - E(x)$

Et

$h: [0,1] \longrightarrow [0,1] : x \longrightarrow |2x-1|$.

1)a)Soit : $f = ho\varphi$.

Démontrer que :

- f est continue sur $\mathbb{R}$,
- f admet le réel 1 pour période
- f est une fonction paire .

b) Représenter la courbe de f dans un repère $R.O.N(O,\vec{i},\vec{j})$

2) Soit F la restriction de f au segment $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Montrer que F admet une bijection réciproque F^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble image .

3) Soit $g = F^{-1}of$

a) Démontrer que g est définie, continue sur $\mathbb{R}$ de période 1

et que g est paire.

b) Soit : $k \in \mathbb{Z}$;

Exprimer $g(x)$ en fonction de x et de k

Dans les deux cas :

$x \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right[$ et $x \in \left[k-\frac{1}{2}, k\right[$

Exercice N° 8:

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie

par : $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$.

1) Pour : $n > 1$; dresser le tableau de Variation de f_n.

Déterminer l'unique élément $\alpha_n \in]0,1[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$.

2) Etudier suivant les valeurs du réel , le nombre de solutions de l'équation : $f_1(x) = k$.

3) Montrer que l'équation :

$\left|x\sqrt{1-x}\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ admet trois solutions x_1 , x_2 et x_3 vérifiant :

$\frac{-1}{3} < x_1 < 0 < x_2 < \frac{2}{3} < x_3 < 1$

4) Pour $i \in \{1,2,3\}$;

On pose : $u_i = \frac{3}{2}\left(x_i - \frac{1}{3}\right)$.

Montrer qu'il existe un unique réel $\theta_i \in [0,\pi]$ tel que : $u_i = cos\,\theta_i$

5) Montrer que θ_1 , θ_2 et θ_3 sont les Solutions de l'équation : $cos3\theta = \frac{1}{2}$ avec $\theta \in [0,\pi]$.

6) Déduire les trois réels x_1 , x_2 et x_3.

Exercice N° 1:

Soit la fonction $f : x \longrightarrow x+\sqrt{1+x^2}$

1)Etudier les variations de f.

On a : les deux fonctions : $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow 1+x^2$

sont définie , continues et dérivables sur $\mathbb{R}$

Et puisque : pour tout $x \in \mathbb{R}$; $1+x^2>0$;

Alors : la fonction $x \rightarrow \sqrt{1+x^2}$ est définie , continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc f est définie , continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$

On a : pour tout $x \in \mathbb{R}$; $1+x^2>x^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}>|x|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}>sup(x,-x)$$

En particulier : pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\sqrt{1+x^2}>-x$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\sqrt{1+x^2}+x>0$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x)>0$

Conclusion : la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f :

Calculons les limites aux bornes de D_f :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{1+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}}=0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{1+x^2}=+\infty$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

2)Montrer que f admet une application réciproque f^{-1} dont on étudiera les variations .

On a : f est continue , strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$. Soit donc : $f^{-1}:\ ]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$

3) Calculer $x-\sqrt{x^2+1}$ en fonction de (x) . en déduire l'expression de $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

Soit $x\in\mathbb{R}$; $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)f(x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)f(x)=-1$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{1+x^2}=\frac{-1}{f(x)}\ .$$

On a : $f^{-1}:\ ]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$

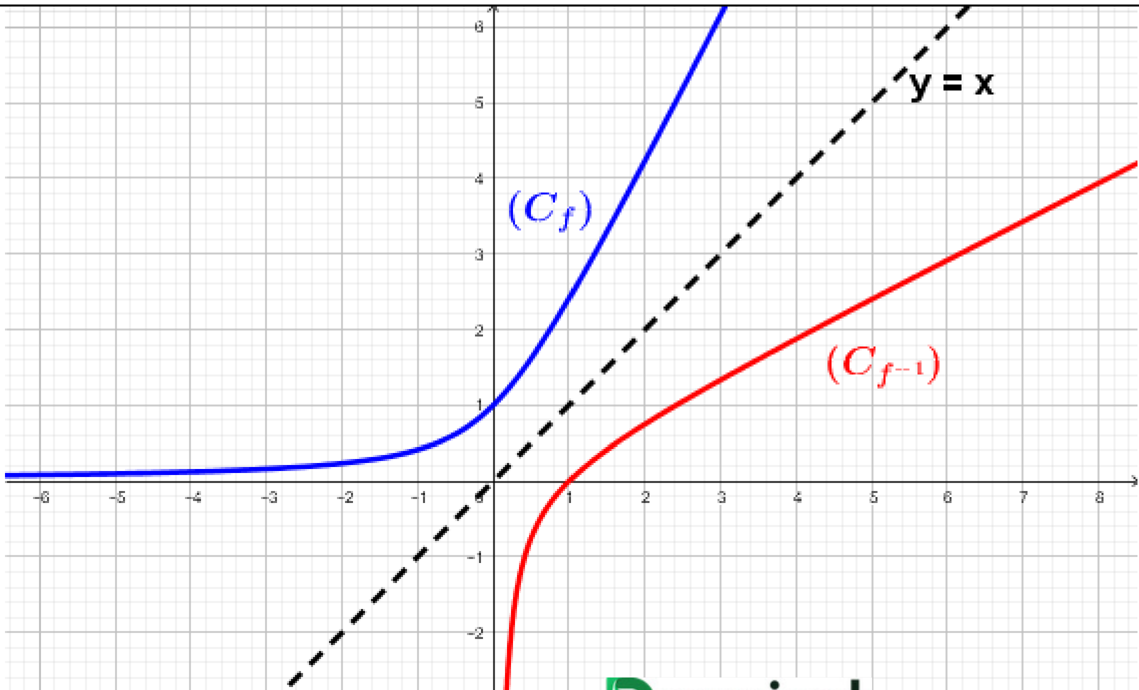
Soit : $y\in\ ]0,+\infty[\ \Leftrightarrow$ *il existe un unique* $x\in\mathbb{R}$ *tel que* : $f(x)=y$

$f(x)=y\Leftrightarrow x+\sqrt{1+x^2}=y \qquad (*)$

Or on sait que : $x-\sqrt{1+x^2}=\frac{-1}{f(x)}=\frac{-1}{y} \qquad (**)$

$(*)+(**)$ donne : $2x=\frac{-1}{y}+y\Leftrightarrow x=\frac{-1+y^2}{2y}$

Conclusion : $f^{-1}:\ ]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}:x\longrightarrow\frac{-1+x^2}{2x}$



Exercice N° 2:

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1) Etudier les variations de f.

On a : pour tout $x \in \mathbb{R}$; $x^2 + 1 > 0$, donc la fonction f est définie , continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$

Donc la fonction : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Les limites de f :

Ona : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1 + \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0 \; car : \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= 2$$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

2Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution $\in\ ]1,2[$.

On pose : $\varphi(x) = f(x) - x$

$$\varphi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{1-(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0$$

Car : pour tout $x \in \mathbb{R}$; $(x^2+1)\sqrt{x^2+1} > 1$

Donc on a :la fonction φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

De plus φ est continue et puisque : $\varphi(1) \times \varphi(2) = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) < 0$

Alors l'équation : $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in\ ]1,2[$

Donc l'équation : $f(x) = x$ admet une unique solution $\in\ ]1,2[$.

3) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera . Définir la fonction réciproque f^{-1} .

On a : f est continue , strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,2[$. Soit donc : $f^{-1} :\ ]0,2[\longrightarrow \mathbb{R}$.

Soit : $y \in\ ]0,2[\Leftrightarrow$ *il existe un unique* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* : $f(x) = y$

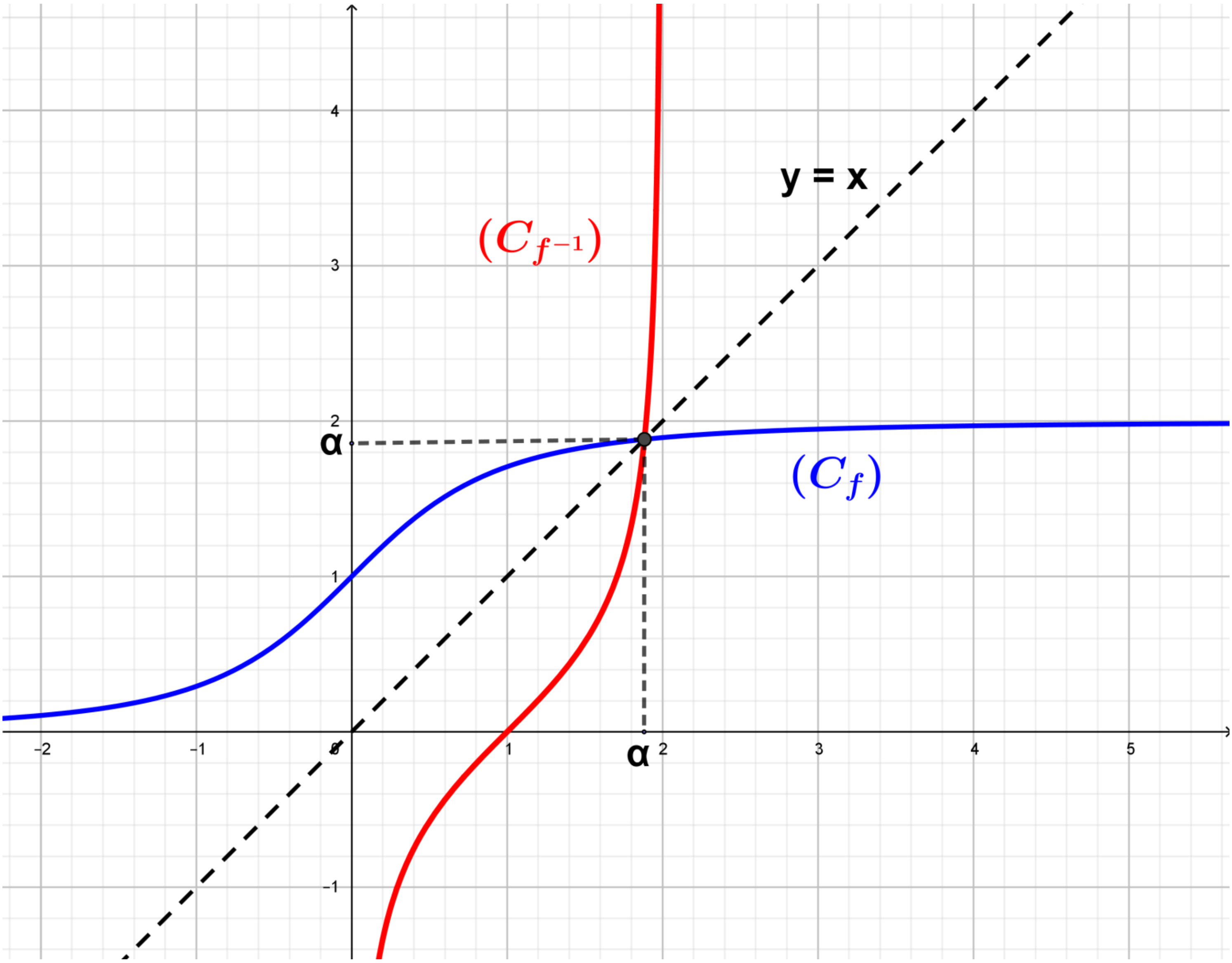
$$f(x) = y \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = y \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = y - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 = (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = (y-1)^2 \Leftrightarrow x^2 = (y-1)^2(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2(1-(y-1)^2) = (y-1)^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{(y-1)^2}{y(2-y)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pm(y-1)}{\sqrt{y(2-y)}} \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{\sqrt{y(2-y)}} \quad car \quad \lim_{x\to 2^-} f^{-1}(x) = +\infty$$

Donc : $f^{-1}:]0,2[\longrightarrow \mathbb{R} ; x \longrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x(2-y)}}$



Exercice N° 3:

Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ par : $f(x) = tg(\pi x) - \pi x + 1$

1) Etudier les variations de f.

On a :pour tout $x \in \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$; $\pi x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

donc la fonction $x \rightarrow tg(\pi x)$ est définie , continue , dérivable sur $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

de plus : $x \rightarrow -\pi x + 1$ est définie , continue , dérivable sur $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

Donc la fonction f est définie , continue , dérivable sur $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$,

pour tout $x \in \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$; $f'(x) = \pi\left(1 + tg^2(\pi x)\right) - 1 = \pi \times tg^2(\pi x) \geq 0$

Tableau de variation de f :

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) Montrer que f réalise une bijection de $\left]\frac{-1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on déterminera. Soit g la bijection réciproque de .

Etudier la continuité et la dérivabilité de g. Calculer $g'\left(2-\frac{\pi}{4}\right)$.

On a : f est continue , strictement monotone sur $\left]\frac{-1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right[$,donc elle réalise une bijection de $\left]\frac{-1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right[$ sur $f\left(\left]\frac{-1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$

et sa fonction réciproque g est définie sur $\mathbb{R}$.

Puisque f est continue sur $\left]\frac{-1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right[$,alors g est continue sur sur $\mathbb{R}$.

On a : f est dérivable sur $\left]\frac{-1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]\frac{-1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right[\backslash\{0\}$; $f'(x) \neq 0$

Donc : g est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ car : $f(0) = 1$

$$g'\left(2-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(2-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

Posons : $f^{-1}\left(2-\frac{\pi}{4}\right) = x \Leftrightarrow f(x) = 2-\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow f^{-1}\left(2-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$

Donc :

$$g'\left(2-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{\pi}$$

3) a) Montrer qu'il existe un seul réel α de $\left]-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right[$ tel que : $f(\alpha) = 0$.

On a : $f\left(\left]-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right[\right) = \left]-\infty\ ,\frac{\pi}{4}\right[$

Puisque on sait que $0 \in \left]-\infty\ ,\frac{\pi}{4}\right[$ et la fonction f est une bijection sur $\left]-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right[$

alors qu'il existe un seul réel α de $\left]-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right[$ tel que : $f(\alpha) = 0$

b) Dresser le tableau de signe de $f(x)$

x	$-\frac{1}{2}$		α		$\frac{1}{2}$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖

4) Soit la fonction h définie par : $h(x)=\dfrac{\pi x-1}{\pi\sin\pi x}$; $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\backslash\{0\}$.

Etudier les variations de h. Préciser $h'_g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $h'_d\left(-\frac{1}{2}\right)$.

On a : la fonction h est continue, dérivable sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\backslash\{0\}$ et

Pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\backslash\{0\}$; $h'(x)=\dfrac{\pi^2\left(\sin(\pi x)-\cos(\pi x)(\pi x-1)\right)}{\pi^2\sin^2(\pi x)}$

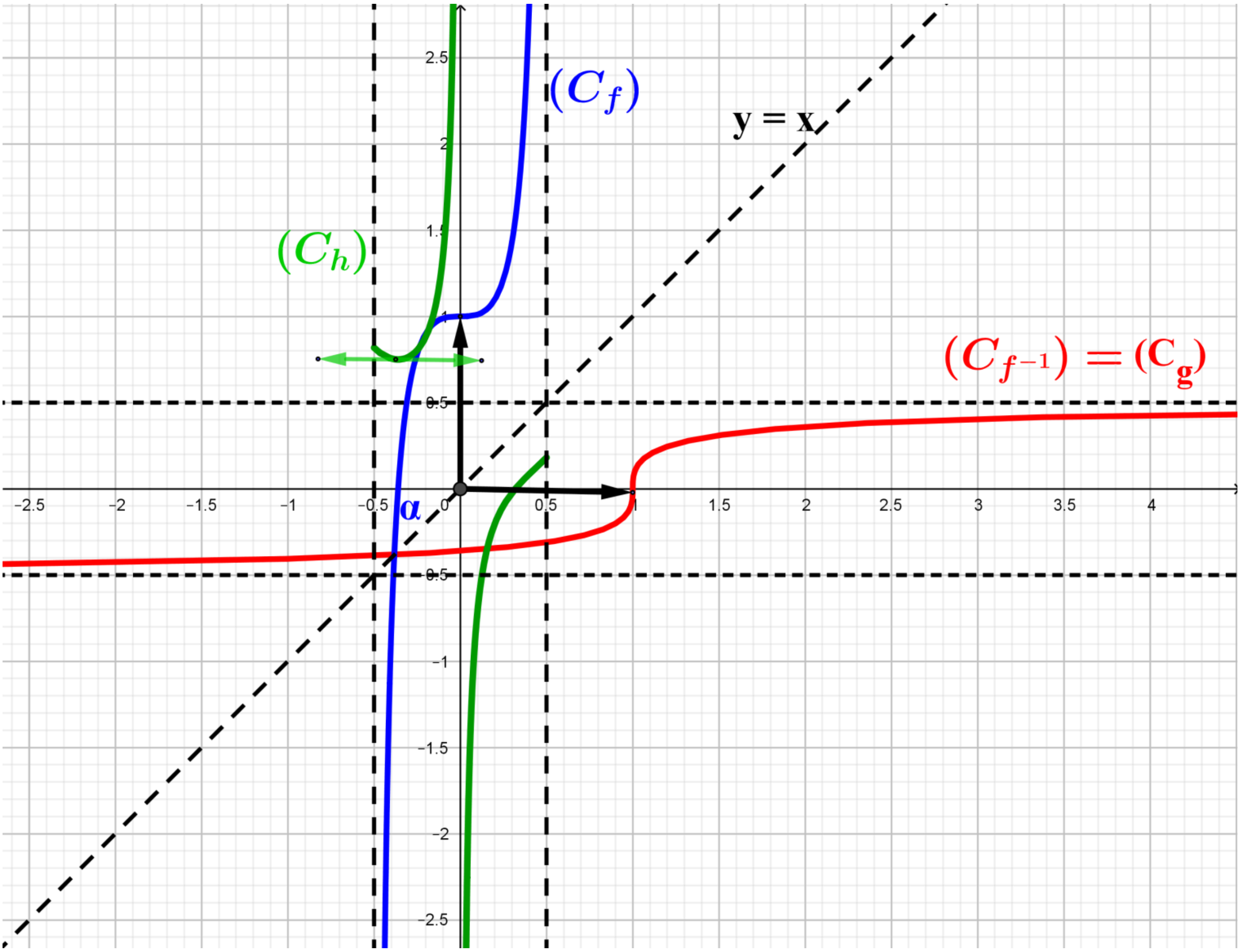
$\Leftrightarrow$ Pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\backslash\{0\}$; $h'(x)=\dfrac{(tg\pi x-\pi x+1)\cos\pi x}{\sin^2(\pi x)}$

$\Leftrightarrow$ Pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\backslash\{0\}$; $h'(x)=\dfrac{f(x)\cos\pi x}{\sin^2(\pi x)}$

On a : Pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\backslash\{0\}$; $\cos\pi x\geq 0$ et $\sin^2(\pi x)>0$

Donc Pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\backslash\{0\}$; $h'(x)$ et $f(x)$ ont le meme signe :

x	$-\frac{1}{2}$		α		0		$\frac{1}{2}$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
h	$h(-\frac{1}{2})$	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



$$h'_d\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad et \quad h'_g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Exercice N° 4:

Soit la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\frac{1}{cos^2(x)}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

On a : la fonction f est définie , continue , dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et :

Pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $f'(x)=\frac{sin2x}{cos^4x}\geq 0$ $car: 2x\in[0,\pi[$.

On a donc : f est continue , strictement monotone sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc elle réalise

$$une\ bijection\ de\left[0,\frac{\pi}{2}\right[sur\ \ J=\left[f(0),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)\right[=[1,+\infty[.$$

Donc : : $f^{-1}:[1,+\infty[\longrightarrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

2) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur un intervalle I que l'on déterminera et calculer $(f^{-1})'(x)$.

On a : f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$; $f'(x)\neq 0$

Donc : f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$:

Soit $x\in\ ]1,+\infty[\ alors:\ \ (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Or pour tout $\in\ ]1,+\infty[$, il existe un unique $y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $f(y)=x$

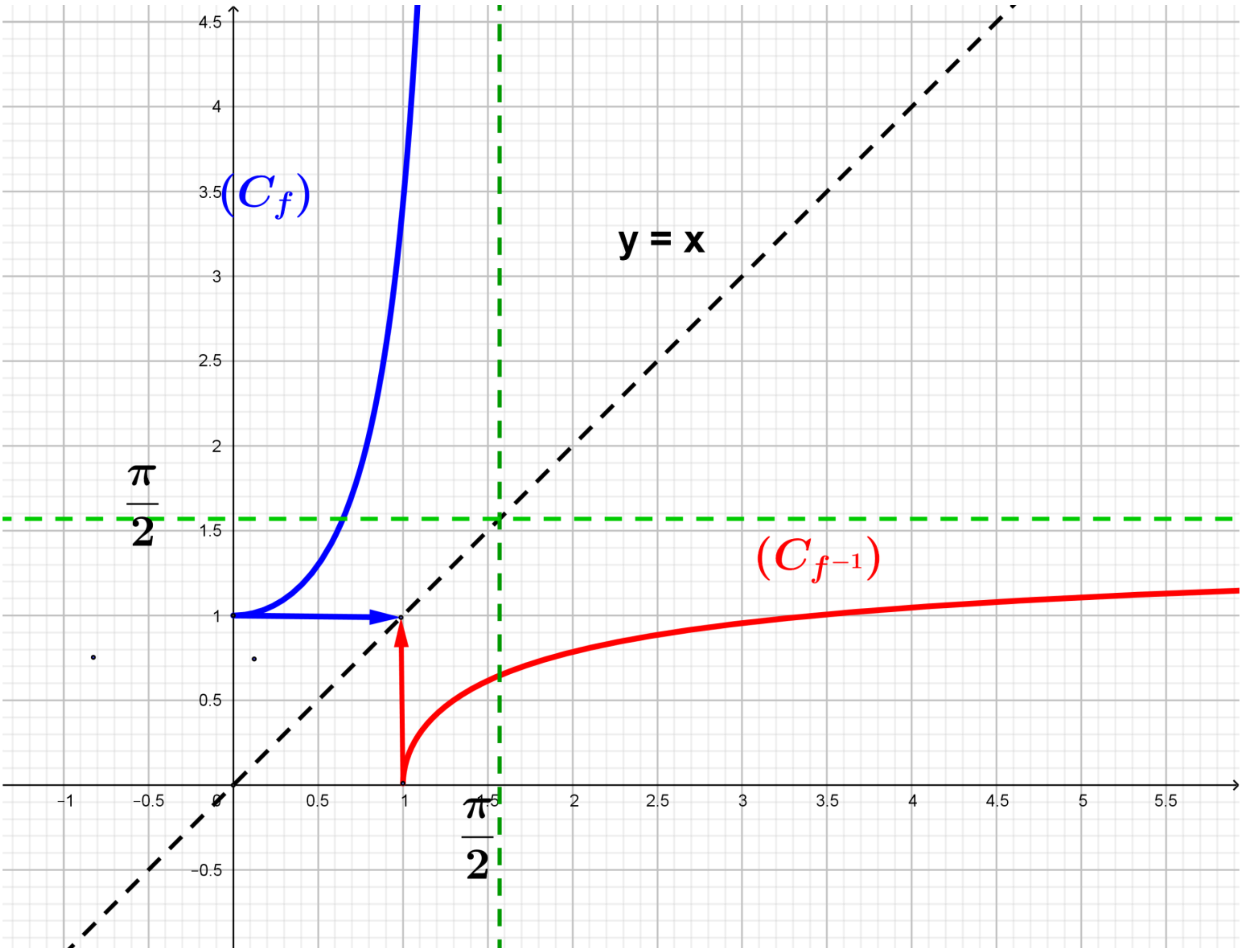
$$\Leftrightarrow pour\ tout\ x\in\ ]1,+\infty[\,;(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{cos^4(y)}{sin2y}$$

On a : $x=f(y)\Leftrightarrow x=\frac{1}{cos^2y}\Leftrightarrow cos^2y=\frac{1}{x}\Leftrightarrow cos^4(y)=\frac{1}{x^2}$

Et $sin2y=2sinycosy=2\left(\sqrt{1-cos^2y}\right)cosy=2\sqrt{1-\frac{1}{x}}\times\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\Leftrightarrow (f^{-1})'(x)=\frac{\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{1-\frac{1}{x}}\times\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}$$

Finalement : pour tout $x \in \left]1,+\infty\right[$; $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$



3) Soit $g(x) = f^{-1}(1 + cos^2 x)$

a) déterminer l'ensemble de définition de .

On sait que : pour tout $x \in \mathbb{R}$; $1 \leq 1 + cos^2 x \leq 2$

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$; $1 + cos^2 x \in [1, +\infty[= D_f$

Et par suite : $D_g = \mathbb{R}$.

b) étudier la dérivabilité de g et donner $g'(x)$.

On a : $g = f^{-1}oh$ avec $h : x \longrightarrow 1 + cos^2 x$.

On a : h est dérivable sur $\mathbb{R}$

f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$,

Et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;k \in \mathbb{Z}\right\}$; $h(x) \in \,]1, 2] \subset \,]1, +\infty[$,

Donc : g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Autrement :

f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$,

$1 + cos^2 x \in \,]1, +\infty[\iff 1 + cos^2 x \neq 1 \iff x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,;k \in \mathbb{Z}$

Donc : g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Et pour tout : $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$$g'(x) = (f^{-1}oh)'(\mathrm{x}) = \mathrm{h}'(\mathrm{x}) \times (f^{-1})'\big(h(x)\big) = (-\mathrm{sin2x})\frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{1}{1+cos^2 x}}}$$

$$\iff g'(x) = \frac{-\mathrm{sin2x}\sqrt{1 + cos^2 x}}{2\mathrm{cosx}} = -\mathrm{sin(x)}\sqrt{1 + cos^2 x}$$

Exercice N° 5:

Soit la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

par : $f(x) = sinx$

a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur : $[-1, 1]$

Calculer : $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

On a : f est continue, dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et

Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $f'(x) = cosx \geq 0$

Donc f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc réalise une bijection

de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$

$$f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow sinx = \frac{\sqrt{3}}{2} \; et \; x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = x \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow sinx = -\frac{1}{2} \; etx \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

b) Si $a \in [-1, 1]$; Calculer : $f^{-1}(a) + f^{-1}(-a)$.

Soit $a \in [-1, 1]$; $on \; pose : \; f^{-1}(a) = x \Leftrightarrow f(x) = a \Leftrightarrow sinx = a$

$$\Leftrightarrow sin(-x) = -a \Leftrightarrow f^{-1}(-a) = -x$$

Donc : $f^{-1}(a) + f^{-1}(-a) = x + (-x) = 0.$

c) Si $x \in [-1, 1]$; Calculer : $sin[f^{-1}(x)]$ et $cos[f^{-1}(x)]$.

Si $x \in [-1, 1]$; $on \; a$: $sin[f^{-1}(x)] = f([f^{-1}(x)]) = x$

Et $cos[f^{-1}(x)] = \sqrt{1 - sin^2(f^{-1}(x))} = \sqrt{1 - x^2}$

2) Soit la fonction g définie sur $[0,\pi]$ par : $g(x) = cosx$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} . Déterminer $D_{g^{-1}}$

On a : la fonction g est continue, dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et

Pour tout $x \in [0,\pi]$; $f'(x) = -sinx \leq 0$, donc g est continue , strictement monotone sur $[0,\pi]$, donc elle réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$

et alors : $D_{g^{-1}} = [-1,1]$.

b) Si $x \in D_{g^{-1}}$; Calculer : $cos[g^{-1}(x)]$ et $sin[g^{-1}(x)]$

Soit $x \in [-1,1]$; $cos[g^{-1}(x)] = g\left(g^{-1}(x)\right) = x$

Et $sin[g^{-1}(x)] = \sqrt{1 - cos^2\left(g^{-1}(x)\right)} = \sqrt{1 - x^2}$

c)Montrer que : $\forall x \in D_{g^{-1}}; g^{-1}(x) = \pi - g^{-1}(-x)$

Soit $x \in [-1,1]$; $g\left(\pi - g^{-1}(-x)\right) = cos\left(\pi - g^{-1}(-x)\right)$

$$= -cos\left(g^{-1}(-x)\right)$$

$$= -x$$

Donc pour tout : $x \in [-1,1]$; $g^{-1}(x) = \pi - g^{-1}(-x)$

d) Soit $a \in [-1,1]$. Exprimer à l'aide de $g^{-1}(a)$ toutes les solutions de l'équation : $cosx = a$.

On a : $cosx = a \Leftrightarrow g(x) = a \Leftrightarrow x = g^{-1}(a)$.

3) a) Montrer que : $\forall x \in [-1,1]$;

$0 \leq \frac{\pi}{2} - f^{-1}(x) \leq \pi$

On sait que pour tout : $x \in [-1,1]$; $-\frac{\pi}{2} \leq f^{-1}(x) \leq \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq -f^{-1}(x) \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} - f^{-1}(x) \leq \pi$

b) Calculer : $cos\left[\frac{\pi}{2} - f^{-1}(x)\right]$

$$cos\left[\frac{\pi}{2} - f^{-1}(x)\right] = sin\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

c) Montrer que : $\forall x \in [-1,1]$; $f^{-1}(x) + g^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

On sait que $\forall x \in [-1,1]$; $\cos\left[\frac{\pi}{2} - f^{-1}(x)\right] = x$

Donc : $\forall x \in [-1,1]$; $g^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - f^{-1}(x)$

$\Leftrightarrow \ \forall x \in [-1,1]$; $f^{-1}(x) + g^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

Exercice N° 6:

Soit la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \frac{1}{1+\sin x}$

1) Soit la fonction φ définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\varphi(x) = \frac{1-x}{x} - \sin x$.

a) 1)Etudier les variations de φ.

La fonction : $x \longrightarrow \frac{1-x}{x} - \sin x$ est la somme de deux fonctions continues ,

dérivables sur $\mathbb{R}^*$, en particulier sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

donc la fonction φ est continue , dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

et pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$; $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} - \cos x = -\left(\frac{1}{x^2} + \cos x\right)$

Donc : pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$; $\varphi'(x) < 0$ car $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ $alors \cos x > 0$

Donc : φ est strictement décroissante sur : $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\varphi'(x)$	$-$	
φ	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{2}{\pi} - 2$

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Puisque φ est continue strictement décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors elle

Réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[\frac{2}{\pi} - 2 , +\infty\right[$

On a : $0 \in \left[\frac{2}{\pi} - 2 , +\infty\right[$ alors il existe un unique réel $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ / $\varphi(\alpha) = 0$

$$\varphi(\alpha)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha}-\sin\alpha=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}=1+\sin\alpha \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{1+\sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \alpha=f(\alpha)$$

Donc : l'équation : $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

2) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

On a : $f=goh$ avec : $g: x \to \frac{1}{1+x}$ et $h: x \to \sin x$

On a : $h: x \to \sin x$ est continue , dérivable sur $\mathbb{R}$,

en particulier sur : $I = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$.

Aussi : $g: x \to \frac{1}{1+x}$ est continue , dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et

Pour tout $x \in I=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$; $h(x) \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$;

Donc la fonction : $f=goh$ est continue , dérivable sur $I=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$

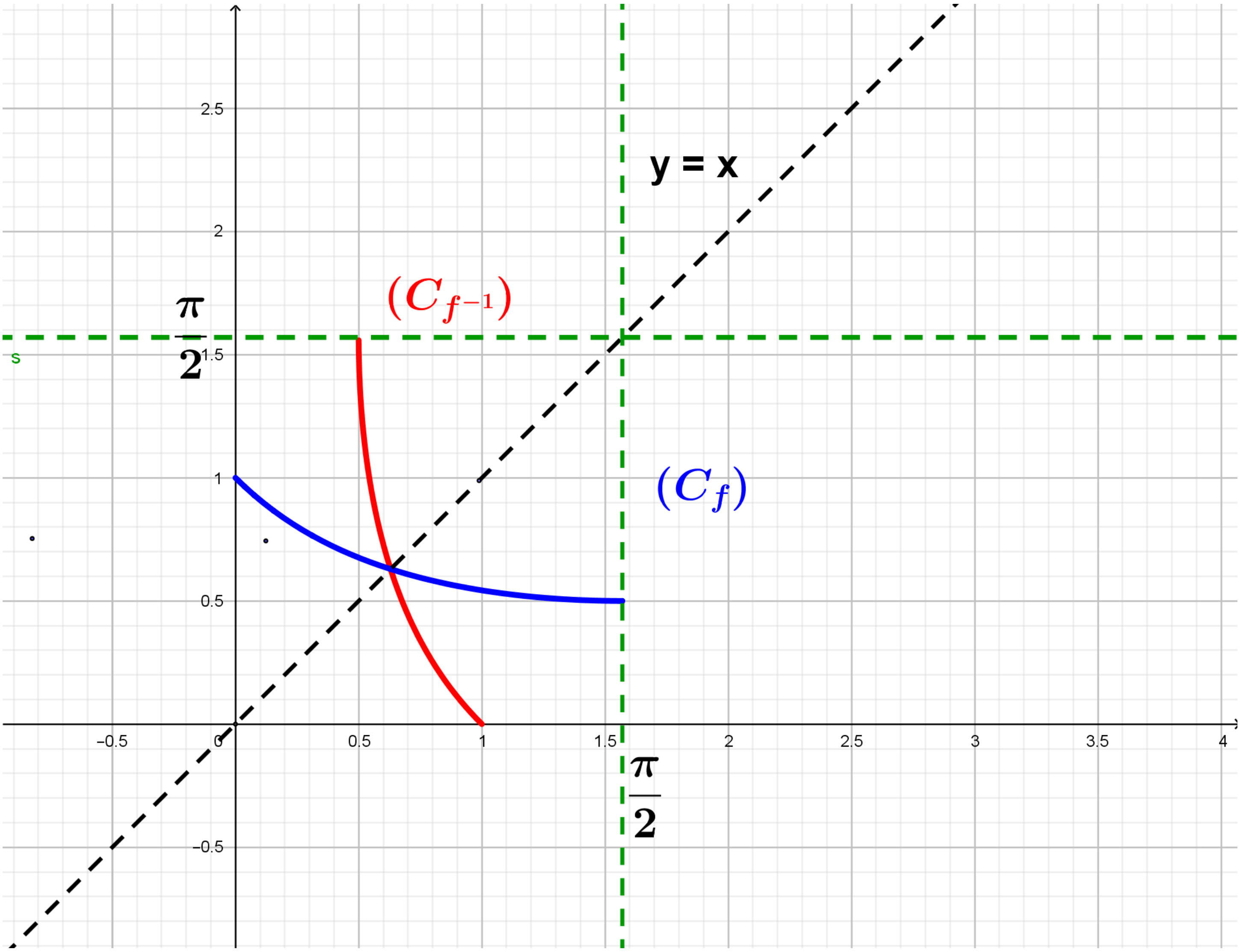
En particulier ; f est continue, dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

Et pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; $f'(x)=\frac{-\cos x}{(1+\sin x)^2} \leq 0$ et par suite :

f est strictement décroissante sur : $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
f	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

f étant continue , strictement monotone sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $J=\left[\frac{1}{2},1\right]$ donc f admet une fonction réciproque noté f^{-1} et : $f^{-1}: \left[\frac{1}{2},1\right] \longrightarrow \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et est elle aussi continue , strictement décroissante sur son domaine $J=\left[\frac{1}{2},1\right]$



3) a) Soit $x \in J$. Exprimer $sin[f^{-1}(x)]$ et $cos[f^{-1}(x)]$

en fonction de x .

Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$; $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+siny} = x$$

$$\Leftrightarrow siny = \frac{1}{x} - 1$$

$$\Leftrightarrow sin[f^{-1}(x)] = \frac{1}{x} - 1$$

Or on sait que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$; $cos^2\left(f^{-1}(x)\right) + sin^2\left(f^{-1}(x)\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \left|cos[f^{-1}(x)]\right| = \sqrt{1 - sin^2\left(f^{-1}(x)\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left|cos[f^{-1}(x)]\right| = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2}$$

Or : pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$; $f^{-1}(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *donc* $\cos[f^{-1}(x)] \geq 0$

$$\textit{donc} \text{ : pour tout } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]; \quad \cos[f^{-1}(x)] = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}$$

b) En déduire : $f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ et $f^{-1}(2-\sqrt{2})$

$$f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = y \Leftrightarrow f(y) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{1+\sin y} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sin y = \frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \sin y = \frac{1}{2}$$

Or : $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow y = \frac{\pi}{6}$ donc : $f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

$$f^{-1}(2-\sqrt{2}) = z \Leftrightarrow \frac{1}{1+\sin z} = 2-\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin z = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin z = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow z = \frac{\pi}{4} \quad car : \ z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f^{-1}(2-\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$$

c) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; Calculer : $f^{-1}\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)$

$$f^{-1}\left(\frac{1}{1+\cos x}\right) = y \Leftrightarrow f(y) = \frac{1}{1+\cos x} \Leftrightarrow \frac{1}{1+\sin y} = \frac{1}{1+\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \sin y = \cos x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - y = x + 2k\pi \\ \frac{\pi}{2} - y = -x + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \end{cases}$$

Or on sait que : $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc : $f^{-1}\left(\frac{1}{1+\cos x}\right) = \frac{\pi}{2} - x$

Autrement :

$$f^{-1}\left(\frac{1}{1+\cos x}\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right) = f^{-1}\left(f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$$

Exercice N° 7:

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $E(x)$ la partie Entière de x. On considère les deux fonctions : $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] : x \longrightarrow x - E(x)$

Et $h : [0,1] \longrightarrow [0,1] : x \longrightarrow |2x-1|$.

1)a)Soit : $f = ho\varphi$. Démontrer que :

- f est continue sur $\mathbb{R}$,
- f admet le réel 1 pour période
- f est une fonction paire .

On sait que la fonction partie Entière de x est continue sur tout Intervalle de la forme : $[n, n+1[$ avec : $n \in \mathbb{Z}$

Donc la fonction $\varphi : x \longrightarrow x - E(x)$ est continue sur tout intervalle $[n, n+1[$ avec : $n \in \mathbb{Z}$

Et la fonction $h : x \longrightarrow |2x-1|$ est continue sur $\mathbb{R} \supset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$

En particulier $h : x \longrightarrow |2x-1|$ est continue sur tout intervalle $[n, n+1[$

Donc la fonction f est continue sur tout intervalle $[n, n+1[$ avec : $n \in \mathbb{Z}$

Etudions la continuité de f en $\mathbb{Z}$:

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = ho\varphi(x) = \left|2\left(x - E(x)\right) - 1\right|$

Et par suite pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{cases} f(x) = |2(x-n+1)-1| \; si \; x \in [n-1, n[\\ f(x) = |2(x-n)-1| \; si \; x \in [n, n+1[\end{cases}$$

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = 1 \;\; et \;\; \lim_{x \to n^+} f(x) = 1$$

Donc : f est continue en tout entier $n \in \mathbb{Z}$

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

- f admet le réel 1 pour période

On a : $f = ho\varphi$

On remarque que : toute période de φ est une période de f.

Soit $x \in \mathbb{R}$: $\varphi(x+1) = x+1-E(x+1) = x+1-(E(x)+1) = x - E(x)$

Donc : 1 est une période de φ

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} : f(x+1) = ho\varphi(x+1) = ho\varphi(x) = f(x)$$

Donc : **1 est une période de f.**

- **Montrons que : f est une fonction paire .**
  - Soit $x \in \mathbb{R}\,;\, -x \in \mathbb{R}$
  - $f(-x) = \left|2\big(-x - E(-x)\big) - 1\right|$

  On sait que : $E(x) = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1 \Leftrightarrow -n-1 \leq -x < -n$

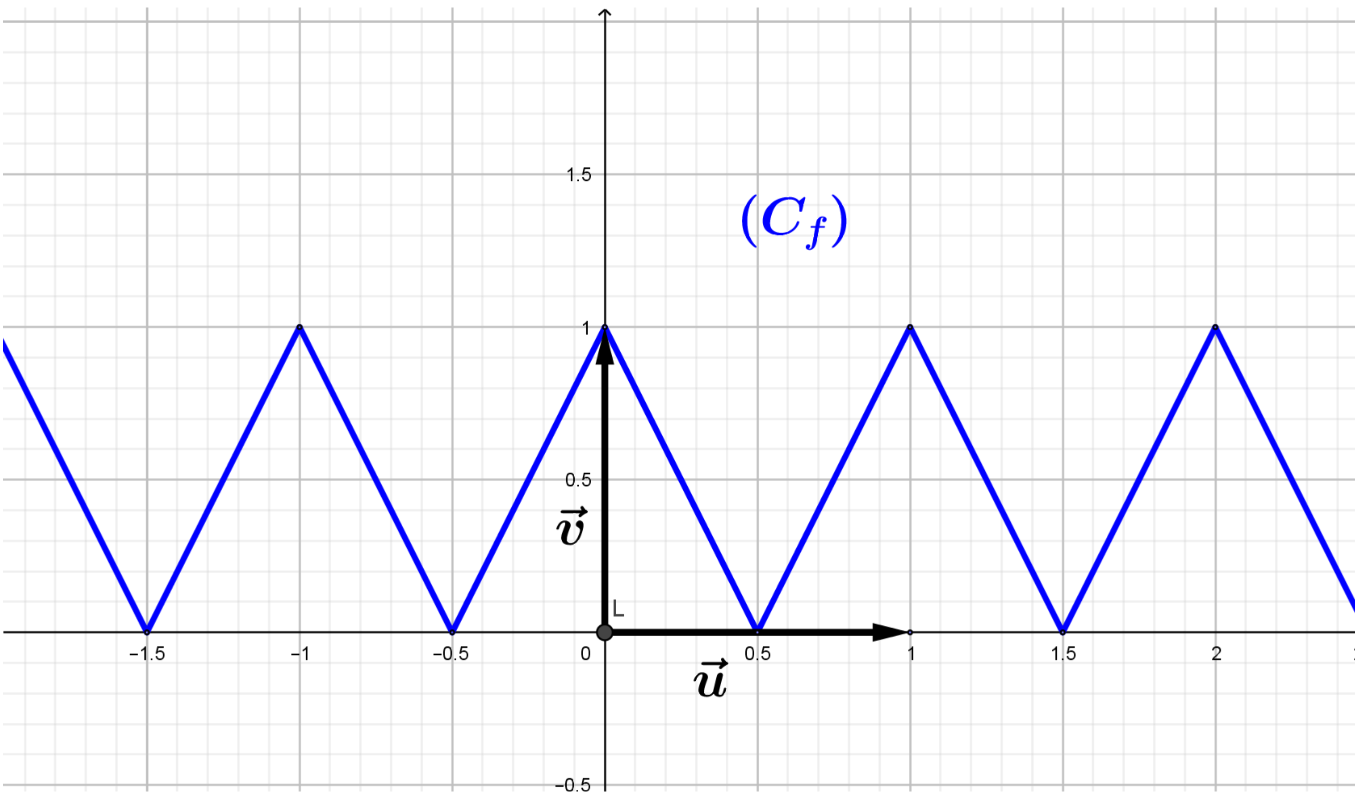
  $$1^{er} cas : si\ x = n\ alors : f(-x) = f(-n) = 1 = f(n) = f(x)$$

  $$2^{\text{ème}} cas : si\ x \neq n\ alors : E(-x) = -n - 1 = -E(x) - 1$$

  Donc :
  $$\begin{aligned} f(-x) &= \left|2\big(-x - E(-x)\big) - 1\right| \\ &= |2(-x + E(x) + 1) - 1| \\ &= |2(x - E(x) - 1) + 1| \\ &= \left|2\big(x - E(x)\big) + 1\right| \\ &= f(x) \end{aligned}$$

  Donc : f est une fonction paire .

b) Représenter la courbe de f dans un repère $R.O.N(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$



2) Soit F la restriction de f au segment $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Montrer que F admet une bijection réciproque F^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition

et l'ensemble image .

Soit $\in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, alors : $E(x) = 0$

Donc : pour tout $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$; $f(x) = |2x-1| = 1-2x \quad (car : \ 2x-1 \leq 0)$

Donc : $F : \left[0,\frac{1}{2}\right] \longrightarrow [0,1]$; $x \longrightarrow 1-2x$ est une fonction continue ,

Strictement décroissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, donc F admet une fonction réciproque F^{-1}

Et on a : F^{-1}: $[0,1] \longrightarrow \left[0,\frac{1}{2}\right]$.

3) Soit $g = F^{-1} o f$

a) Démontrer que g est définie, continue sur $\mathbb{R}$ de période 1

et que g est paire.

On sait que f est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) \in [0,1]$

Et F^{-1} est continue sur $[0,1]$ alors g est définie, continue sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$; $g(x+1) = F^{-1}(f(x+1)) = F^{-1}(f(x)) = g(x)$

Donc : g de période .

Soit $x \in \mathbb{R}\ alors -x \in \mathbb{R}$

Et $g(-x) = F^{-1}(f(-x)) = F^{-1}(f(x)) = g(x)$ donc : g est paire.

b) Soit : $k \in \mathbb{Z}$; Exprimer $g(x)$ en fonction de x et de k

Dans les deux cas : $x \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right[$ et $x \in \left[k-\frac{1}{2}, k\right[$

Soit $x \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right[$; $g(x) = F^{-1}(f(x))$

Or : $f(x) = |2(x-E(x))-1|$

On a : $x \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right[\ alors : E(x) = k$

$$\Rightarrow f(x) = |2(x-k)-1|$$

On a : $k \leq x < k+\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x-k < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 0 \leq 2(x-k) < 1$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 2(x-k)-1 < 0 \Leftrightarrow |2(x-k)-1| = 1-2(x-k)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1-2(x-k) \in [0,1]$$

De plus : On a : pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$; $F(x) = 1-2x \Leftrightarrow F^{-1}(x) = \frac{1-x}{2}$

Donc : pour tout $x \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right[$; $g(x) = F^{-1}(f(x))$

$$= \frac{1-(1-2(x-k))}{2}$$

$$= x-k$$

De même :

pour tout $x \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right[$; $g(x) = k-x$

Exercice N° 8:

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie par : $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$.

1) Pour : $n > 1$; dresser le tableau de Variation de f_n.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \backslash 1-x \geq 0\} =]-\infty, 1]$$

La fonction f est continue sur $]-\infty, 1]$, dérivable sur $]-\infty, 1[$

Et pour tout $x \in]-\infty, 1[$;

$$f'_n(x) = nx^{n-1}\sqrt{1-x} - \frac{x^n}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2nx^{n-1}(1-x)-x^n}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2nx^{n-1} - x^n(2n+1)}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{x^{n-1}\big(2n-x(2n+1)\big)}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{2n}{2n+1}$$

On remarque que le signe de $f'_n(x)$ dépend suivant la parité de n

Si n pair : alors $n-1$ est impair

x	$-\infty$		0		$\frac{2n}{2n+1}$		1
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_n	$+\infty$	↘	0	↗	$f_n\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$	↘	0

Si n impair : alors $n-1$est pair :

x	$-\infty$		0		$\frac{2n}{2n+1}$		1
$f'_n(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
f_n	$-\infty$	↗	0	↗	$f_n\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$	↘	0

Déterminer l'unique élément $\alpha_n \in]0,1[$ tel que : $f'_n(\alpha_n) = 0$.

$$f'_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n = 0 \ ou \ \alpha_n = \frac{2n}{2n+1}$$

Puisque $\alpha_n \in]0,1[$, alors : $\alpha_n = \frac{2n}{2n+1}$

2) Etudier suivant les valeurs du réel k , le nombre de solutions

de l'équation : $f_1(x) = k$.

Tableau de variation de f_1 :

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		1
$f'_1(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
f_1	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0

Si : $k < 0$; l'équation : $f_1(x) = k$ admet une unique solution

Si : $k = 0$; l'équation : $f_1(x) = 0$ admet deux solutions : 0 et 1

Si : $0 < k < \frac{2}{3\sqrt{3}}$; l'équation : $f_1(x) = k$ admet deux solutions > 0

Si : $k = \frac{2}{3\sqrt{3}}$; l'équation : $f_1(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ admet une unique solution : $\frac{2}{3}$

Si : $k > \frac{2}{3\sqrt{3}}$; l'équation : $f_1(x) = k$, n'as pas de solution

3) Montrer que l'équation : $|x\sqrt{1-x}| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ admet trois solutions

x_1 , x_2 et x_3 vérifiant : $\frac{-1}{3} < x_1 < 0 < x_2 < \frac{2}{3} < x_3 < 1.$

$$|x\sqrt{1-x}| = \frac{1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow |f_1(x)| = \frac{1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ x \in]0,1[\end{cases} ou \begin{cases} f_1(x) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \\ x \in]-\infty, 0] \end{cases}$$

On a : $0 < \frac{1}{3\sqrt{3}} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ donc l'équation : $f_1(x) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ admet deux solutions

$$dans]0,1[, \qquad x_2 \; et \; x_3 \; tel \; que \; 0 < x_2 < \frac{2}{3} < x_3 < 1$$

On a : $-\frac{1}{3\sqrt{3}} < 0$ donc : $f_1(x) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$ admet une unique solution $x_1 < 0$

On remarque que : $f_1\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} < -\frac{1}{3\sqrt{3}}$

Donc : $-\frac{1}{3} < x_1 < 0$

Conclusion : l'équation : $|x\sqrt{1-x}| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ admet trois solutions

x_1 , x_2 et x_3 vérifiant : $\frac{-1}{3} < x_1 < 0 < x_2 < \frac{2}{3} < x_3 < 1.$

4) Pour $i \in \{1,2,3\}$; On pose : $u_i = \frac{3}{2}\left(x_i - \frac{1}{3}\right)$.

Montrer qu'il existe un unique réel $\theta_i \in [0,\pi]$ tel que : $u_i = cos\, \theta_i$

On a : pour tout : $i \in \{1,2,3\}$; $-\frac{1}{3} < x_i < 1 \Rightarrow -\frac{2}{3} < x_i - \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow -1 < \frac{3}{2}\left(x_i - \frac{1}{3}\right) < 1 \Rightarrow -1 < u_i < 1$$

Or la fonction $x \to cosx$ est une bijection de $[0,\pi]$ $vers$ $[-1,1]$

Et par suite comme pour tout : $i \in \{1,2,3\}$; $u_i \in [-1,1]$, il existe un

Unique $\theta_i \in [0,\pi]$ tel que : $u_i = cos\theta_i$.

5) Montrer que θ_1 , θ_2 et θ_3 sont les s solutions de l'équation : $cos3\theta = \frac{1}{2}$

avec $\theta \in [0,\pi]$.

θ_i est solution de l'équation de $cos3\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow cos3\theta_i = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 4cos^3\theta_i - 3cos\theta_i = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4(u_i)^3 - 3u_i = \frac{1}{2}$$

On a : $4(u_i)^3 - 3u_i - \frac{1}{2} = 4\left(\frac{3}{2}\left(x_i - \frac{1}{3}\right)\right)^3 - 3\left(\frac{3}{2}\left(x_i - \frac{1}{3}\right)\right) - \frac{1}{2}$

$$= 4\left[\frac{27}{8}\left(x_i - \frac{1}{3}\right)^3\right] - \frac{9}{2}\left(x_i - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{9}{2}\left(x_i - \frac{1}{3}\right)\left(3\left(x_i - \frac{1}{3}\right)^2 - 1\right) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{9}{2}\left(x_i - \frac{1}{3}\right)\left(3x_i^2 - 2x_i - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{9}{2}\left(3\left(x_i^3 - x_i^2\right) + \frac{2}{9}\right) - \frac{1}{2}$$

On remplace : $x_i^3 - x_i^2 = -\frac{1}{27}$ car x_i est une solution de $\left|x\sqrt{1-x}\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Donc : $4(u_i)^3 - 3u_i - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\left(3 \times \left(-\frac{1}{27}\right) + \frac{2}{9}\right) - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\left(-\frac{1}{9} + \frac{2}{9}\right) - \frac{1}{2} = 0$

Donc : pour tout : $i \in \{1,2,3\}$; θ_i est solution de l'équation de $cos3\theta = \frac{1}{2}$

6) Déduire les trois réels x_1 , x_2 et x_3.

$$\begin{cases} cos3\theta = \frac{1}{2} \\ \theta \in [0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_i \in \left\{\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}\right\}$$

Donc : pour tout : $i \in \{1,2,3\}$; $u_i \in \left\{cos\left(\frac{\pi}{9}\right), cos\left(\frac{5\pi}{9}\right), cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)\right\}$

On a : $-\frac{1}{3} < x_1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \frac{2\cos\theta_1+1}{3} < 0 \Leftrightarrow -1 < \theta_1 < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta_1 = \frac{7\pi}{9}$

Donc : $x_1 = \frac{2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)+1}{3}$

On a : $\begin{cases} x_2 < x_3 \\ \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \end{cases}$ donc : $x_2 = \frac{2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)+1}{3}$ et $x_3 = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+1}{3}$

Conclusion : les solutions de l'équation : $\left|x\sqrt{1-x}\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ sont :

$$\left\{\frac{2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)+1}{3}, \frac{2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)+1}{3}, \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+1}{3}\right\}$$