Lycée Mateur	Série D'exercices	Classe : 4 Maths
Prof : M .Amri .	Fonction Logarithme népérien	Février 2021

Exercice n° 1

Soit g la fonction définie par : $g(x)=1-\frac{1}{x}+2Ln\,x$

a- Etudier les variations de g

b- Calculer $g(1)$ en déduire le signe de g sur $]0\ ,+\infty[$

2) Soit f la fonction définie sur $]0\ ,+\infty[$ par : $f(x)=1-x+(2x-1)\,Ln\,x$

a- Etudier les variations de f

b- Etudier les branches infinies de ζ_f

c- Tracer ζ_f dans un R.O.N $\left(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j}\right)$

3) $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on pose $U_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$

a- Montrer que $\forall x\succ 1$, on a $\frac{x-1}{2x-1}\le Ln\ x\le x-1$

b- En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ *et pour tout* $1\le k\le n$ $\quad\frac{k}{n^2+2n}\le Ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\le\frac{k}{n^2}$

c- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

Exercice n° 2

1) Soit g la fonction définie sur $]0\ ,+\infty[$ par : $g(x)=\frac{-2}{x+2}+Ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

a- Etudier les variations de g

b- En déduire que $\forall x\succ 0\quad on\ a\ \ g(x)\succ 0$

2) Soit f la fonction définie sur $]0\ ,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x\,Ln\left(\frac{x+2}{x}\right) & si\ x\succ 0\\ f(0)=0 & \end{cases}$

et ζ_f sa courbe dans un dans un R.O.N

a- Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0

b- Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

c- Dresser le tableau de variation de f

d-Tracer ζ_f

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n(x) = f(x) - nx \quad x \in]0;+\infty[$

a- Montrer que $\varphi'_n(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α_n

b-Dresser le tableau de variation de φ_n

4) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{x^2}{2} Ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$

a- Calculer $h'(x)$

b- En déduire la primitive F de f qui s'annule en 1

5) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} f\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$

a- Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ $\quad et\ k \in \{0,1,2,........,n\}$

$$\frac{1}{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right) \le F\left(1+\frac{1+k}{n}\right) - F\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \frac{1}{n} f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

b- En déduire $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ on a $U_n - \dfrac{f(2)}{n} \le F(2) - F(1) \le U_n - \dfrac{f(1)}{n}$

c- Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = F(2)$

Exercice n°3 (contrôle 2012)

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x - xLn(x)$

a - Etudier les variations de g

b- En déduire que l'équation $g(x)$ =0 admet une unique solution $x_0 \in]0, +\infty[$, vérifier que $3,5 \prec x_0 \prec 3,6$

c-En déduire le signe de g

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{Ln\, x}{1+x^2}$

On désigne par (ζ) sa courbe dans un R.O.N $\left(O ,\vec{i} , \vec{j}\right)$

a- Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x)=\dfrac{g\left(x^2\right)}{x\left(1+x^2\right)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Tracer (ζ) (On prend x_0 =3.6)

3) Soit (a_n) la suite définie sur IN^* par $a_n=\int_1^{\frac{1}{n}} f(t)dt$

a) Montrer que (a_n) est croissante

b) Montrer que $\forall x\in]0;1[\; on a \; \ln x \le f(x) \le \dfrac{1}{2}\ln x$

c) En déduire que $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1+\ln(n)}{n}\right)\le a_n \le 1-\dfrac{1+\ln(n)}{n}$

d) Montrer alors que (a_n) est convergente et que sa limite $\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$

<u>**Exercice n°4**</u>

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x)=Ln\left(1+\dfrac{n}{x}\right)-\dfrac{n}{x+n}$

a- Montrer que g_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $g_n'(x)=\dfrac{-n^2}{x\left(x+n\right)^2}$

b- Dresser le tableau de variation de g_n

2) Soit $\begin{cases} f_n(x) \;\; xLn\left(1+\dfrac{n}{x}\right) & ;x\in]0 \;,+\infty[\\ f_n(0) =0 \end{cases}$ ou $n\in\mathbb{N}^*$

a- Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0

b-Dresser le tableau de variation de f_n

3) a- Montrer que $f_n(x)=1 \quad ; \; n\ge 2$ admet une seule solution $\alpha_n\in]0.+\infty[$

b- Montrer que la suite (α_n) est décroissante et déduire qu'elle est convergente

c-Vérifier que $Ln\left(1+\dfrac{n}{\alpha_n}\right)=\dfrac{1}{\alpha_n}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

4) a-Tracer ζ_{f_1} dans un repère R.O.N

b- Montrer que $\forall x \succ 1 \;\; ; \;\; f_1(x) \ge Ln(2)$

5) Soit la suite (w_n) ; $n \in \mathbb{N}^*$ telque $w_n = \dfrac{n^n}{n!}$

a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

b- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \geq 2$ en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $w_n \geq 2^{n-1}$

c- Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

d-Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} Ln(w_{n+1}) - Ln(w_n)$

Exercice n°5 (principale 2012)

I) Soit f_2 définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_2(x) = x^2 - Ln(x)$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un R.O.N $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1)a- Calculer $\lim\limits_{n\to 0^+} f_2(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_2(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement

c) Dresser le tableau de variation de f_2

2) Dans la figure suivante on a tracé la courbe (C) de la fonction Ln et la courbe $L : Y = X^2 \quad ; X \in]0 \; +\infty[$

a-Soit $x \succ 0$,on considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartient respectivement à (C) et (L) ,vérifier que $MM_2 = f_2(x)$

b- construire dans le même repère les points de Γ d'abs. Resp . 2 ; $\frac{1}{e}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$

c) Tracer la courbe Γ dans le même repère

$II)$ 1) soit k un entier ≥ 2 , On considère la fonction f_k définie sur $]0,+\infty[$ par :

$f_k(x) = x^k - Ln(x)$

a- déterminer $f_k^{'}$ fonction dérivée de f_k

b- Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $\frac{1+Ln\,k}{k}$

c) Pour tout x $\succ$ 0 , On considère la distance M (x ;x^{K}) et M_k (x ;ln(x))Donner la valeur minimale de MM_K

2) Pour tout $k \geq 2$ soit $U_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$

a- Vérifier que $Ln\,U_k = \frac{-Ln\,k}{k}$ et en déduire la limite de (U_k)

b-Soit $A(1,0)$ et $A_k(U_k, f(U_k))$

Calculer la limite de la distance AA_K lorsque $k \to +\infty$

Exercice n°6

A) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n(x) = x^n\,Ln(1+x)$; $x \in]-1,+\infty[$

On désigne par (ζ_n) la courbe de f_n dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) On pose $\forall\, x \in]-1,+\infty[$; $\varphi_n(x) = n\,Ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$

a- - Etudier les variations de φ_n

b- Calculer $\varphi_n(0)$ et en déduire le signe de $\varphi_n(x)$ sur $]-1,+\infty[$

2) a- Etudier les variations de f_1

b- $\forall\, n \geq 2$ Etudier les variations de f_n suivant la parité de n

c-Tracer dans le même repère les courbes ζ_1 et ζ_2 en précisant les positions relatives de ces deux courbes .

3) a- Calculer $I = \int_0^1 f_1(x)\,dx$ et $J = \int_0^1 f_2(x)\,dx$

b-Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes ζ_1 et ζ_2

4) a- Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$; $f_n(x) = 1$ admet dans $]0\ ,+\infty[$ une unique solution α_n , Montrer que $\alpha_n \succ 1$

b- Montrer que (α_n) est décroissante

B) Dans cette partie , on se propose d'étudier la limite de la suite (V_n) définie par :

$V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$; Soit $U_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

1) a- Vérifier que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{-1}{n+2} \leq (n+1)\,U_n - Ln\,2 \leq \frac{-1}{2(n+2)}$

b- En déduire la limite de $(n+1)\,U_n$

2) On pose $\forall\ n \geq 1$ et $n \succ -1$; $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k$

a- Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{1+x}$

b- Montrer que $Ln\,2 - V_n = (-1)^{n+1} \cdot \left(Ln\,2 - (n+1)\,U_n\right)$

3) Montrer que V_n est convergente et déterminer sa limite