| =Lycée Mateur | Série de révision<br>Limite - Continuité - Suites - Dérivabilité-Fonctions réciproque | Niveau : 4 Maths |
|---|---|---|
| Prof : M^r Amri | Décembre 2020 | |

# Exercice n°1

On considère une fonction $h$ définie dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ tell que

$h(1)=0$ et $h'(x)=\dfrac{1}{x}$ on pose $F(x)=h\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

1) Montrer que $F$ est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$

2) Montrer que $F$ est une fonction impaire

3) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ ; $F(x)\le x$

# Exercice n°2

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ , on définit la fonction $f_n$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f_n(x)=\tan x-x-n$

1) Soit $n$ un entier naturel fixé

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f_n(x)$

b) Etudier le sens de variation de la fonction $f_n$

c) Montrer que $f_n(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. On note $(\alpha_n)$ cette solution

d) Donner suivant les valeurs de $x$ le signe de $f_n(x)$

2) a) La question 1) c) permet de définir la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $n\in\mathbb{N}$ . Justifier que $(\alpha_n)$ est bornée

b) Calculer $f_n(\alpha_{n+1})$ pour $n\in\mathbb{N}$

c) En déduire que $(\alpha_n)$ est strictement croissante

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\tan\alpha_n$ en déduire que $(\alpha_n)$ est convergente et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

## Exercice n°3

On défini la fonction $f$ sur l'intervalle $\left[0\ ,\pi^2\right]$ par : $f(x)=\cos\left(\sqrt{x}\right)$

1) a) Vérifier que pour tout $x\in\left[0\ ,\pi^2\right]$ ; $f(x)-1=-2\sin^2\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)$

b) Démontrer que $f$ est dérivable en $0$ et calculer $f'(0)$

2) a) Justifier que f est dérivable sur $\left[0\ ,\pi^2\right]$ et calculer $f'(x)$

b) Etudier le sens de variation de la fonction $f$ et dresser son tableau de variation

3) a) Résoudre dans $\left[0\ ,\pi^2\right]$ l'équation $f(x)=0$

b) Déterminer une équation de la tangente à $\zeta_f$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi^2}{4}$

## Exercice n°4

Soit $f$ la fonction définie sur $\left[0\ ,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\sqrt{\tan x}$

On désigne par $\zeta_f$ sa courbe représentative dans un R.O.N $\left(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j}\right)$

1) Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0 ; interpréter le résultat

2) Montrer que $f$ réalise une bijection de $\left[0\ ,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0\ ,+\infty[$

3) Tracer les courbes $\zeta_f$ et $\zeta_{f^{-1}}$ dans $\left(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j}\right)$

4) Soit $g=f^{-1}$ ; montrer que $g$ est dérivable sur $[0\ ,+\infty[$ et que $g'(x)=\dfrac{2x}{x^4+1}$

5) a) Montrer que $\forall\ x\in[0\ ,+\infty[$ ; $g(x)+g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

b) En déduire que $g\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+g\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ est constante à déterminer

6) Soit $(U_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} g\left(\dfrac{1}{n+k}\right)$

Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ ;\ g\left(\frac{1}{2n}\right) \leq U_n \leq g\left(\frac{1}{n}\right)$ En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

---

## Exercice n°5

Soit $f$ la fonction définie sur $]-1;1]$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

On désigne par $\zeta_f$ sa courbe représentative dans un $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) étudier la dérivabilité de $f$ à gauche en 1.Interpréter graphiquement le résultat

b) Montrer que $\forall\ x \in ]-1\ ,1[\ ;\ f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2 \cdot f(x)}$

c) Dresser le tableau de variation de $f$ et tracer $\zeta_f$

d) Montrer que $f(x) = x$ admet dans $]-1\ ,1[$ une solution unique $\alpha$ et que $\frac{1}{2} \prec \alpha \prec \frac{3}{5}$

2) a) Montrer que $f$ réalise une bijection de $]-1\ ,1]$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera

b) Expliciter $f^{-1}(x)\ \forall x \in J$

c) Tracer $\zeta_{f^{-1}}$ courbe de $f^{-1}$ dans le même repère

3) Montrer que $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$ on a $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$ puis déduire que $|f'(x)| \leq \frac{8}{9}$

4) Dans la suite de l'exercice on admet que $\forall a\ ,b \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$ on a $|f(b) - f(a)| \leq \frac{8}{9}|b-a|$

Soit $(U_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ \frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{3}{5}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{8}{9}|U_n - \alpha|$

c) En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{8}{9}\right)^n$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

5) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k\ ; n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que $n\alpha - 9\left(1-\left(\frac{8}{9}\right)^n\right) \le S_n \le n\alpha + 9\left(1-\left(\frac{8}{9}\right)^n\right)$

b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} S_n$ *puis* $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)$

# Exercice n°6

Soit $f$ la fonction définie sur $]-1\,,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

On désigne par $\zeta_f$ sa courbe représentative dans un $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$

1) a) Dresser le tableau de variation de $f$

b) Donner une équation cartésienne de la tangente $\Delta$ à $\zeta_f$ à l'origine $O$

c) Tracer la courbes $\zeta_f$ et la droite $\Delta$

2) a) Montrer que $f$ réalise une bijection de $]-1\,,+\infty[$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera

b) Tracer $\zeta_{f^{-1}}$ courbe de $f^{-1}$ dans $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$

c) Montrer que $\forall x \in J\ ;\ f^{-1}(x) = \frac{x^2 + x\sqrt{x^2+4}}{2}$

3) Soit $g$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

a) Montrer que $\forall n \ge 0\ ;\ -\frac{1}{2} \le g'(x) \le 0$

On admet dans toute la suite que : $\forall a \succ 0$ on a $a - \frac{a^2}{2} \le f(a) \le a$

4) Soit $(U_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{k+n^2}}$

a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$

b) Montrer que pour $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2n^2} \le f\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{n^2}$

c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$

# Exercice n°7

A) On considère $g$ la fonction définie sur $[0\,;1[$ par : $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{1-x^2}}$

a) Etudier la dérivabilité de $g$ à droite en 0 ; Interpréter graphiquement le résultat

b) Etudier les variations de $g$

2) Tracer les courbes $\zeta_g$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3) Vérifier que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \quad g\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \sqrt{\tan x}$

B) On considère la fonction $f$ définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = 2\sqrt{\tan x} - 1$

1) a) Etudier la dérivabilité de $f$ en 0 ;

b) Etudier les variations de $f$

2) a) Mque $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \; ; f'(x) \succ 1$ ( on pourra distinguer les cas ou $\tan x \geq 1$ *et* $\tan x \leq 1$ )

b) On pose $h(x) = f(x) - x$ . Etudier les variations de $h$

c) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ une solution unique $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$

d) En déduire la position de $\zeta_f$ par rapport à la droite $\Delta : y = x$

## Exercice n°8

Soit $f$ la fonction définie sur $]0, \pi]$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\cos x}{\sin x} & si \;\; x \in ]0, \pi[ \\ 0 & si \;\; x = \pi \end{cases}$

1) Montrer que $f$ est continue à gauche en $\pi$

2) Montrer que $f$ est dérivable à gauche en $\pi$ et $f_g'(\pi) = -\frac{1}{2}$

3) Montrer que $\forall x \in \; ]0 ; \pi]$ , $f'(x) = \dfrac{1}{\cos x - 1}$

4) Montrer que $f$ réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera (on note $f^{-1}$ la réciproque de $f$ )

5) a) Vérifier que ; $f^2(x) = \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ puis exprimer $\cos x$ en fonction de $x$

b) Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur $J$ et exprimer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ en fonction de $x$

# Exercice n°9

$I)$ Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,,1]$ par : $f\;(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$

On désigne par $\zeta_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$

1) a) Etudier la dérivabilité de $f$ à gauche en 1. Interpréter le résultat

b) Montrer que $f$ est dérivable sur $]0\,,1[$ et que $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\;\;+1\;-x^2}$ $\forall x\in[0\,,1[$

2) a) Montrer que $f$ réalise une bijection de $[0\,,1]$ sur $[0\,,1]$

on note $f^{-1}$ la fonction réciproque de $f$

b) Tracer les courbes $(\zeta_f)$ et $(\zeta_{f^{-1}})$ dans le même un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$

c) Montrer que $f^{-1}(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ ; $\forall x\in[0\,,1]$

$II)$ Soit $g$ la fonction définie sur $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $g\;(x)=f(\cos x)$

1) Vérifier que $\forall x\in\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ; $g\;(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

2) montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur $[0\,,1]$

3) Montrer que $g^{-1}$ est dérivable sur $[0\,,1]$ et que $(g^{-1})'(x)=\dfrac{-2}{1+x^2}$

4) Montrer que $g\;(x)=x$ admet une solution unique $\alpha$ et vérifie que $\dfrac{\pi}{6}\prec\alpha\prec\dfrac{\pi}{2}$

5) Soit la suite $(U_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}g^{-1}\left(\alpha+\dfrac{1}{n+k}\right)$

a) Montrer que $\forall n\succ 0$ on a $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)g^{-1}\left(\alpha+\dfrac{1}{n}\right)\le U_n\le\left(1+\dfrac{1}{n}\right)g^{-1}\left(\alpha+\dfrac{1}{2n}\right)$

b) En déduire que $(U_n)$ est convergente et calculer sa limite

# Exercice n°10

I) Soit la fonction f définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\sqrt[3]{\tan^2 x}$

1) a) Montrer que f est continue sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ est dérivable sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

b) Calculer f'(x) pour x élément de $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et montrer que f n'est dérivable à droite en zéro

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Tracer les courbes représentatives de f et de $f^{-1}$ dans un même repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ . On calculera $f(\frac{\pi}{4})$ et $f(\frac{\pi}{3})$

c) Sans calculer $f^{-1}(2)$ prouver que $f^{-1}(2) > \frac{\pi}{3}$ . En déduire que $f^{-1}(2) > 1$

3) a) Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer et calculer $(f^{-1})'(x)$

b) Montrer que $f^{-1}$ est dérivable à droite en zéro

II) Soit H(x) = $\dfrac{f^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1}$ et $H(1)=a$

1) Déterminer l'ensemble $D_H$ de H

2) Déterminer a pour que H soit continue sur $D_H$

III) On pose $\varphi(x) = f^{-1}(x^2)+f^{-1}(\frac{1}{x^2})$

1) a) Montrer que $\varphi$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$ . Déduire que : $\forall$ x $\in$ $]0;+\infty[$ $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$

b) Déduire que : $\forall$ n $\in$ IN* $f^{-1}(n)+f^{-1}(\frac{1}{n^2})=\frac{\pi}{2}$

2) Démontrer que $\forall n \in IN^*$ et $\forall$ k $\in$ $\{0,1,2,.......n\}$ : $f^{-1}(n) \leq f^{-1}(n+k) \leq f^{-1}(2n)$

3) Soit $(U_N)_{n\in IN^*}$ définie par $U_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}(\dfrac{1}{n+k})$

Montrer que $\forall n \in IN^*$ $f^{-1}(\frac{1}{2n}) \leq U_n \leq f^{-1}(\frac{1}{n})$ $Endeduire$ $\lim_{x\to+\infty} U_n$

.