Lycée de Tabarka | **Série N°2** | 4 ème Maths

Prof : Mersani Imed | **Fonctions réciproques** | 2020/2021

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=\tan x$.

1 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

2 Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que pour tout $x\in J$, $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

3 Montrer que f^{-1} est impaire.

4 a) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $0\leqslant x-f^{-1}(x)\leqslant\dfrac{x^3}{3}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x^2}$.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 Étudier f et construire C_f.

2 a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de g dans le même repère.

c) Montrer que pour tout $x\in[0,2[$, $g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$.

3 Soit la fonction h définie sur $[0,\pi[$ par $h(x)=g(1-\cos x)$.

a) Montrer que pour tout $x\in[0,\pi[$, $h(x)=\tan(\dfrac{x}{2})$.

b) Montrer que h réalise une bijection de $[0,\pi[$ sur $[0,+\infty[$.

c) Monter que h^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $(h^{-1})'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$, $x\in[0,+\infty[$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 Dresser le tableau de tableau de variation de f et tracer $\mathscr{C}_f$.

2 (a) Montrer que f est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

(b) Tracer, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ représentative de f^{-1}.

3 Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^4-1}}$.

4 Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} g(x) = f^{-1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) & \text{si } x > 0 \\ g(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$. On désigne par $\mathscr{C}_g$ représentative de g dans un autre repère orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

(a) Montrer que g est continue sur $[0, +\infty[$.

(b) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$.

(c) On admet que g est dérivable à droite en 0 et que $g'_d(0) = -1$.
Dresser le tableau de variation de g et tarcer $\mathscr{C}_g$.

Exercice 4 :

Soit la fonction définiue sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ par $f(x) = \tan(\pi x)$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 Dresser le tableau de variation de f et tracer $\mathscr{C}_f$.

2 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

3 Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que pour tout $x \in J$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

4 Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = f^{-1}(\frac{1}{x})$. On désigne par $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de h dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(a) Calculer $h'(x)$, pour $x \in]0, +\infty[$ et en déduire que pour tout $x > 0$, $h(x) = -f^{-1}(x) + \frac{1}{2}$.

(b) Montrer que $\mathscr{C}_h$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par une isométrie que l'on caractérisera.

Exercice 5 :

Soit la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \sqrt{\tan x}$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 (a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

(b) Dresser le tableau de de variation de f.

2 (a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

(b) On désigne par $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ la courbe représentative de f^{-1} dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$.

3 Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que pour tout $x \geqslant 0$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$.

4 Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f^{-1}(x) + f^{-1}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.

5 Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^{-1}(n+k)$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \{0,1,...,n\}$,

$$f^{-1}(n) \leqslant f^{-1}(n+k) \leqslant f^{-1}(2n).$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(n) \leqslant u_n \leqslant f^{-1}(2n)$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{4},+\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\tan x} & \text{si } x \in]-\frac{\pi}{4},0] \\ 1-x+\sqrt{x^2+2x} & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 (a) Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement.

(b) Dresser le tableau de variation de f puis tracer $\mathscr{C}$.

2 On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $]0,+\infty[$.

(a) Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

(b) Construire la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de la fonction g^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(c) Expliciter $g^{-1}(x)$, pour tout $x \in J$.

3 On désigne par h la restriction de f de l'intervalle $]-\frac{\pi}{4},0]$.

(a) Montrer que h est une bijection de $]-\frac{\pi}{4},0]$ sur un intervalle K que l'on précisera.

(b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur K et que $(h^{-1})'(x) = \dfrac{-1}{2x^2-2x+1}$, $x \in K$.

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie sur $]0,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 (a) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

(b) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que $f'(x) = \dfrac{-1}{4x^2\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}}$, $x \in]0,1[$.

(c) Dresser le tableau de variation de f.

2 (a) Montrer que f est une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$.

(b) On désigne par $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de la fonction f^{-1} réciproque de f. Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ dans le même repère.

3 Soit g la fonction définie sur $[0,\dfrac{\pi}{2}[$ par $g(x)=f(\cos^2 x)$.

(a) Vérifier que pour tout $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}[$, $g(x)=\dfrac{1}{2}\tan x$.

(b) Montrer que g admet une fonction réciproque qu'on notera g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

(c) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une solution unique solution α dans $[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}[$.

(d) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et pour tout $x\in J$, $(g^{-1})'(x)=\dfrac{2}{4x^2+1}$.

4 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $u_{n+1}=g^{-1}(u_n)$, $n\in\mathbb{N}$.

(a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqslant u_n\leqslant\alpha$.

(b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

(c) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

5 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(g^{-1}(\frac{k+1}{2})-g^{-1}(\frac{k}{2})\right)$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=2\sqrt{1-\sin(\dfrac{\pi x}{2})}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 (a) Montrer que pour tout $x\in[-1,1[$, $\dfrac{f(x)}{x-1}=-2\sqrt{\dfrac{1-\cos(\frac{\pi}{2}(1-x))}{(1-x)^2}}$.

(b) En déduire que f est dérivable à gauche en 1 et que $f'_g(1)=-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

2 Dresser le tableau de variation de f.

3 Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

4 (a) Montrer que f est une bijection de $[-1,1]$ sur $[0,2\sqrt{2}]$.

(b) Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de f^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5 Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0,2\sqrt{2}[$ et pour tout $x\in[0,2\sqrt{2}[$, $(f^{-1})'(x)=\dfrac{-4}{\pi\sqrt{8-x^2}}$.