Sujet De Révision N°1	$4^{éme}$ Math
Prof : Aoiaiti Med	Durée : 4 H

(Similitude, Géométrie dans l'espace, Arithmétique, Fonction Exponentielle et Intégrale)

Exercice 1

Soit ABCD un trapèze rectangle tels que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC}$ et $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$

(voir Annexe page 4)

On désigne par E le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

1/ Soit S la similitude directe qui envoie D en C et A en B.

a- Déterminer le rapport et l'angle de S.

b- Soit I le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

Prouver que I est le centre de S.

c- Montrer la demi-droite [IE) est la bissectrice du secteur [IA, IB].

2/ Soit B′ le symétrique de A par rapport à I.

a- Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f tels que f (I) = A et f (B) = B′

b- Construire le point $F = f\ (E)$.

c- Montrer que f est une symétrie glissante.

d- Montrer que l'axe Δ de f est la perpendiculaire à la droite (IE) passant par le milieu J de [CD].

Donner la forme réduite de f.

3/ On pose $g = f \circ S$.

a- Déterminer g(I) et g(D) .

b- Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

4/ On munit le plan du repère orthonormé direct $R = (D,\overrightarrow{DC}, \sqrt{3}\,\overrightarrow{DI})$

Soit M un point d'affixe z, on pose $g\ (M) = M'(z')$ et $M*M' = M_1\ (z_1)$

a- Montrer que : $z_1 = \bar{z} + \frac{z}{2}$

b- Déterminer l'ensemble des points M_1 lorsque M décrit un cercle de centre D et de rayon r.

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

On considère les points $A(1,0,0)$, $B(1,1,1)$ et $C(0,1,0)$.

1) a-Déterminer les composants du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

En déduire que A, B et C déterminent un plan P d'équation : $x + y - z - 1 = 0$.

b-Soit le point D(0,0,1) .Vérifier que ABCD est un tétraèdre et calculer son volume.

c- Montrer que le plan P et la sphère S de centre D et de rayon $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ sont tangents en

Un point H dont on précisera les coordonnées.

2) Soit h l'application qui a tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que $\begin{cases} x' = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \\ x' = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \\ x' = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$

a-Montrer que h est une homothétie dont on précisera le rapport et les coordonnées du centre.

b-Déterminer les coordonnées du point $A' = h(A)$.

3) a-Ecrire une équation cartésienne du plan Q tel que $h(Q) = P$.

b- On désigne par S' la sphère circonscrit au tétraèdre ABCD.

Montrer que $h(S') = S$.

c- En déduire que Q et S' sont tangents et déterminer les coordonnées de leur point de contact.

<u>Exercice 3</u>

Soit n un entier naturel non nul.

1) soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $(E) : 3x + 7y = 10^{2n}$

a- Donner une solution particulier dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $3u + 7v = 1$ et en déduire une

Solution particulière ((x_0, y_0) de l'équation (E) .

b- Résoudre alors l'équation (E).

2) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $(E') : 3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$.

a-Montrer que pour tout entier relatif x les restes de division euclidienne de $3x^2$ par 7sont: 0, 3, 5 et 6.

b- Montrer que pour tout entier naturel n les restes de division euclidienne de 2^n par 7sont: 1, 2 et 4.

c-En déduire que si (x, y) est une solution de (E') alors $3x^2 \equiv 2^n (mod 7)$.

d-Conclure alors pour l'équation (E').

Exercice 4

I)

1/a- Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' = 2y + 2$.

b-soit l'équation différentielle $(E') : y' = y + 2e^{-x}$.

Montrer que f est une solution de (E') ssi la fonction g définie par $g(x) = e^x f(x)$ est une solution de (E).

c- Résoudre alors l'équation (E').

2/a-Montrer que la fonction f définie sur IR par $f(x) = e^x - e^{-x}$ est la solution de (E') qui s'annule en 0.

b-Dresser le tableau de variation de f.

c- Construire la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

d- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ et expliciter $f^{-1}(x)$.

3/ Soit la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \int_0^{f(x)} \sqrt{4+t^2}\, dt$

a-Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $H'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

b- En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $H(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) + 2x$.

c- En intégrant par partie calculer en fonction de x la fonction $\int_0^{f(x)} \frac{t^2}{\sqrt{4+t^2}} dt$.

II) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $F_n(x) = \int_e^{\frac{1}{f(x)}} (1 + lnt)^n\, dt$

1/ Calculer $F_1(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_1(x)$.

2/a-Montrer a l'aide d'une intégration par partie que

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{f(x)}[1 - \ln(f(x))]^{n+1} - (n+1)F_n(x)$$

b- En utilisant la formule de binôme de newton montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)}[1 - \ln(f(x))]^{n+1} = 0$$

c- Montrer par récurrence que la fonction F_n admet une limite finie non nulle l_n lors que x tend vers $+\infty$.

d- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $l_n = (-1)^n e\, n!$.

Annexe (Exercice 1)