Conique – Similitude Exponentiel - Intégral

4ème Section Mathématique

Exercice N°1

Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole (P) de foyer $F(0,2)$ et de directrice la droite (D) d'équation : $y = 4$. On désigne par (Δ) la droite parallèle à (D) et passant par le point F.

1. Soit M un point de (P) d'ordonnée inférieure strictement à 2 et H le projeté orthogonal de M sur (Δ).
 a) Montrer que : $MF - MH = 2$.
 b) En déduire que le cercle de centre M et de rayon MH est tangent au cercle de diamètre $[AB]$ où A et B sont les points d'intersection de (P) avec la droite (Δ).

2.a) Trouver une équation de (P) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ puis tracer (P).
 b) Soit (D_m) une droite variable d'équation $y = mx + 2$ où m est un paramètre réel. La droite (D_m) coupe (P) en S et T. Montrer que, le milieu I de $[ST]$, appartient à une conique fixe (P') dont on donnera une équation dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3. Soit l'ellipse (E) d'excentricité $e = \dfrac{1}{3}$, de foyer $F(0,2)$ et de directrice associée la droite (D).
 a) Justifier que (P) et (E) n'ont aucun point commun.
 b) Trouver une équation de (E) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 c) Déterminer les sommets de (E), son deuxième foyer F' et sa deuxième directrice (D').
 d) Tracer F', (D') et (E) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Dans le plan orienté, on considère le carré direct $ABCD$ de centre O. On désigne par I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AD]$ et $[BC]$.

1. Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f qui transforme D en A et J en I. Vérifier que $f = S_{(DB)} \circ t_{\overrightarrow{JK}}$ où $t_{\overrightarrow{JK}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{JK}$ et $S_{(DB)}$ est la réflexion d'axe (DB).
2. Caractériser l'antidéplacement f :
 a) En décomposant convenablement la translation $t_{\overrightarrow{JK}}$
 b) En exploitant l'écriture complexe de f dans le repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$
3. Montrer que : $f(A) = B$
4. On pose : $g = S_{(AI)} \circ f$. Montrer que g est un déplacement que l'on caractérisera.
5. Soit S la similitude directe qui transforme D en O et C en I.
 a) Donner le rapport et un angle de S.
 b) Préciser $S[(BC)]$ et $S[(BD)]$, en déduire $S(B)$.
 c) Montrer que : $S(A) = J$.
 d) Soit Ω le centre de S. Montrer que les points Ω, I, B et C sont cocycliques.
6.a) Donner la nature de $S \circ S$ et préciser ses éléments caractéristiques.
 b) En déduire que Ω est le barycentre des deux points $(B, 1)$ et $(J, 4)$ puis construire Ω.
7. Soit E le point du plan défini par : $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BA}$ et soit S' la similitude directe de centre B qui transforme C en E. Caractériser $S \circ S'$ et montrer que $\Omega E = 2\Omega D$ et que $(\Omega E) \perp (\Omega D)$.

Partie A

Soit $\mathbf{f}$ la fonction de variable réelle $\mathbf{x}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{e^{2x}+1} & x \geq 0 \\ \dfrac{-\ln(1-x)}{2x} & x < 0 \end{cases}$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité $2cm$.

1. Etudier la continuité de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{0}$.
2. Justifier que $\mathbf{f}$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$. Donner la valeur de la dérivé à droite de $\mathbf{0}$.
3. Soit $\mathbf{h}$ un réel strictement négatif. On définit sur $]-\infty, 0]$ la fonction $\mathbf{u}$ par :

$$u(x) = \left(\frac{\ln(1-h)+h}{h^2}\right)x^2 - \ln(1-x) - x$$

a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel $\mathbf{c}$ appartenant à $]h, 0[$ tel que :

$$\frac{\ln(1-h)+h}{h^2} = \frac{1}{2(c-1)}.$$

b) Prouver que : $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{\ln(1-h)+h}{h^2} = -\frac{1}{2}$

c) Prouver que $\mathbf{f}$ est dérivable à gauche en $\mathbf{0}$ et donner la valeur de la dérivé à gauche en $\mathbf{0}$.

d) $\mathbf{f}$ est elle dérivable en $\mathbf{0}$?

4.a) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. En déduire le sens de variation de $\mathbf{f}$ sur $[0, +\infty[$.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$.

c) Pour $x \leq 0$, on pose : $v(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$.
Etablir le tableau de variation de la fonction $\mathbf{v}$ puis déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x < 0$.

d) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$ en y précisant les limites de $\mathbf{f}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. Tracer la courbe (C_f) dans le repère précédent $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

1. Justifier que $\mathbf{f}$ possède des primitives sur $[0, +\infty[$.
2. Soit la fonction $\mathbf{G}$ définie sur $I = [\pi/4, \pi/2[$ par : $G(x) = \displaystyle\int_0^{\ln(\tan x)} f(t)dt$.

a) Calculer $G(\pi/4)$ et $G'(x)$ pour tout $\mathbf{x}$ de $\mathbf{I}$.

b) Prouver que : $\forall x \in I$, $\quad G(x) = x - \pi/4$.

c) Soit β un réel positif, justifier l'existence d'un unique réel α de $\mathbf{I}$ tel que : $\beta = \ln(\tan\alpha)$.

d) On suppose que si β tend vers $+\infty$ alors α tend vers $\dfrac{\pi}{2}$. Calculer en cm^2, l'aire $A(\beta)$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \beta$ puis calculer $\displaystyle\lim_{\beta \to +\infty} A(\beta)$.

Professeur Mr Kamel Bel Asri