Exercice N°1

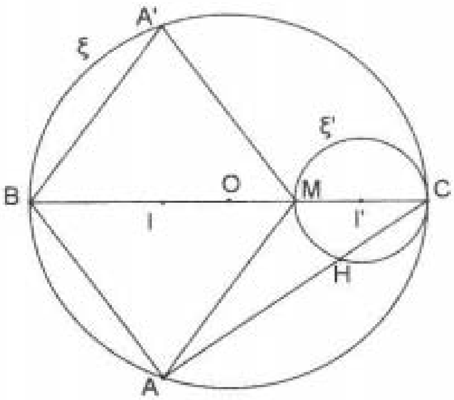
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Dans la figure ci-dessous,

ξ est le cercle de centre O et de diamètre $[BC]$, M est le point de $[BC]$ tel que $CM = \frac{1}{3}BC$

et ξ' est le cercle de diamètre $[CM]$. I et I' sont les milieux respectifs des segments $[BM]$ et $[CM]$.

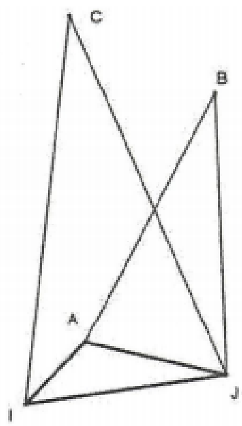
A et A' sont deux points du cercle ξ tels que AMA'B est un losange et $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

La droite (AC) recoupe le cercle ξ' en H.



1) a) Montrer que les droites (AB) et (HM) sont parallèles.
   b) En déduire que les points H, M et A' sont alignés.
   c) Montrer que $HM = \frac{1}{3}AB$ et que $HA^2 = AB^2 - HM^2$.
2) On désigne par S la similitude directe de centre H qui envoie A en M.
   a) Préciser l'angle de S et montrer que son rapport est égal à $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
   b) Déterminer les images par S des droites (AI) et (MH). En déduire $S(A')$.
3) Montrer que $S(I) = I'$ et en déduire que (HI) est tangente en H au cercle ξ'.
4) On pose $S' = S_{(AH)} \circ S \circ S_{(AH)}$.
   a) Vérifier que S' est une similitude directe dont on précisera le centre et le rapport.
   b) La droite (A'M) recoupe le cercle ξ en N. Montrer que le triangle MCN est isocèle de sommet principal C.
   c) Déterminer $S'(A)$. En déduire alors l'angle de S'.

Dans le plan orienté, AIJ est un triangle quelconque, BAJ et CIJ sont deux triangles isocèles respectivement en B et C tels que $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BJ}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.



On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et par r_B et r_C les rotations de même angle $\frac{\pi}{6}$ et de centres respectifs B et C.

1) a) Déterminer $r_C(I)$.
   b) Montrer que $r_B \circ t(I) = J$.
   c) En déduire que $r_B \circ t = r_C$.

2) Soit K = t (C).

Montrer que BC = BK et $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK}}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

3) Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et $(\widehat{\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DA}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

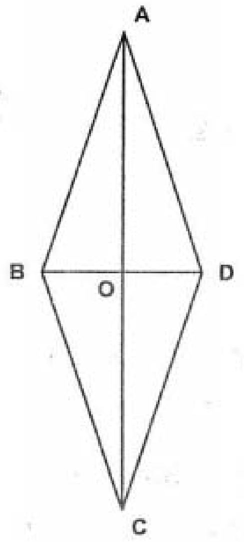
a) Soit O le milieu de [AC].
Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC.

b) Montrer que ABCD est un parallélogramme.

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ABCD est un losange

de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AC = 3 BD.



1) Soit f la similitude directe qui envoie A en B et C en D.

a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

b) Montrer que O est le centre de f.

2) a) Soit D' l'image de D par f. Montrer que D' est l'orthocentre du triangle ABD et que OA = 9OD'.

b) Soit B' l'image de B par f. Montrer que BB'DD' est un losange.

3) Soit g = f ∘ $S_{(AC)}$.

a) Déterminer la nature de g.

b) Déterminer les images des points O, A, B, C et D par g.

c) Déterminer l'axe Δ de g.

d) La droite Δ coupe les droites (AB), (BD'), (DB') et (CD) respectivement en M, N, P et Q.

Montrer que MQ = 3 NP.