Professeur Mr Kamel Bel Asri	# Probabilité	4ème Maths

Exercice N°1

1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une hasard, et on considère les événements

$$A = \text{"tirage d'un nombre pair"},$$

$$B = \text{"tirage d'un multiple de 3"}.$$

Les événements A et B sont-ils indépendants?

2. Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

Exercice N°2

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. A chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité 1/3. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième lecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième lecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

Exercice N°3

Dans une entreprise deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier 1 fabrique en une journée deux fois plus de pièces que l'atelier 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 3% pour l'atelier 1 et 4% pour l'atelier 2. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée. Déterminer

1. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1;
2. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 et est défectueuse;
3. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 sachant qu'elle est défectueuse.

Exercice N° 5

Un gène présent dans une population est formé de 2 allèles A et a. Un individu peut donc avoir l'un des trois génotypes suivants : AA, Aa, aa. Un enfant lors de la conception hérite d'un allèle de chacun de ses parents, chacun d'eux étant choisi au hasard. Ainsi si le père est du type AA et la mère de type Aa, les enfants peuvent être du type AA ou Aa. On considère une population (génération 0) et on note p_0, q_0 et r_0 les proportions respectives de chacun des phénotypes AA, Aa et aa. On admet que les couples se forment au hasard indépendamment des génotypes considérés.

1. Donner, en fonction de p_0, q_0 et r_0 la probabilité p_1 qu'un enfant de la génération 1 ait un génotype AA.
2. Donner de même r_1, puis q_1.
3. Démontrer que p_1, q_1 et r_1 s'expriment uniquement en fonction de $\alpha = p_0 - r_0$. Que peut-on dire de $p_1 - r_1$.
4. Donner les probabilités p_2, q_2 et r_2 qu'un enfant de la génération 2 ait pour génotype respectivement AA, Aa et aa. Que peut-on conclure?

Exercice N°4

Une particule se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse a (a entier), sur un segment gradué de 0 à N (on suppose donc $0 \leq a \leq N$). A chaque instant, elle fait un bond de $+1$ avec la probabilité p ($0 < p < 1/2$), ou un bond de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$. Autrement dit, si x_n est l'abscisse de la particule à l'instant n, on a :

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{avec probabilité } p \\ x_n - 1 & \text{avec probabilité } 1 - p. \end{cases}$$

Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités du segment (i.e. s'il existe x_n avec $x_n = 0$ ou $x_n = N$).

1. Écrire un algorithme qui simule cette marche aléatoire. En particulier, cet algorithme prendra en entrée l'abscisse a de départ, la longueur N du segment, et produira en sortie un message indiquant si la marche s'arrête en 0 ou en N, et le nombre de pas nécessaires pour que le processus s'arrête. On supposera qu'on dispose d'une fonction alea() qui retourne un nombre aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$.
2. On note u_a la probabilité pour que la particule partant de a, le processus s'arrête en 0.
   - 2.1. Que vaut u_0? u_N?
   - 2.2. Montrer que si $0 < a < N$, alors $u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$.
   - 2.3. En déduire l'expression exacte de u_a.
3. On note v_a la probabilité pour que la particule partant de a, le processus s'arrête en N. Reprendre les questions précédentes avec v_a au lieu de u_a.
4. Calculer $u_a + v_a$. Qu'en déduisez-vous?

Exercice N° 6

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de clés USB. 5% des boites sont abîmées. Le gérant estime que :

- 60% des boites abîmées contiennent au moins une clé défectueuse.
- 98% des boites non abîmées ne contiennent aucune clé défectueuse.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : ``la boite est abîmée'' et par $D$ l'événement ``la boite achetée contient au moins une clé défectueuse''.

1. Donner les probabilités de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P(D|A)$, $P(D|\bar{A})$, $P(\bar{D}|A)$ et $P(\bar{D}|\bar{A})$. En déduire la probabilité de D.
2. Le client constate qu'un des clés achetées est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abîmée?

Exercice N° 7

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour la classe R_2, et 30% pour la classe R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année?
2. Si M.Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque?

Exercice N° 8

Un joueur décide de jouer aux machines à sous. Il va jouer sur deux machines $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ qui sont réglées de la facon suivante :

- la probabilité de gagner sur la machine $\mathcal{A}$ est de $\frac{1}{5}$;
- la probabilité de gagner sur la machine $\mathcal{B}$ est de $\frac{1}{10}$.

Comme le joueur soupçonne les machines d'avoir des réglages différents, mais ne sait pas laquelle est la plus favorable, il décide d'adopter la stratégie suivante :

- il commence par choisir une machine au hasard ;
- après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre, il rejoue sur la même machine s'il vient de gagner.

On définit pour tout $k \geq 1$ les événements suivants :

- G_k : "Le joueur gagne la k-ième partie".
- A_k : "La k-ième partie se déroule sur la machine $\mathcal{A}$".

1. Écrire un algorithme qui simule le déroulement de n parties et retourne la proportion de parties gagnées parmi ces n parties.
2. Determiner la probabilité de gagner la première partie.
3. Déterminer la probabilité de gagner la deuxième partie.
4. Sachant que la deuxième partie a été gagnée, quelle est la probabilité que la première partie ait eu lieu sur la machine $\mathcal{A}$?
5. Soit $k \geq 1$.
   - 5.1. Exprimer $P(G_k)$ en fonction de $P(A_k)$.
   - 5.2. Montrer que $P(A_{k+1}) = -\frac{7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}$.
   - 5.3. En déduire $P(A_k)$ puis $P(G_k)$ en fonction de k.
   - 5.4. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} P(G_k)$. Calculer S_n puis déterminer la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand $n \to +\infty$.