Prof Mr Kamel Bel Asri

Logarithme et exponentiel

4ème Math- sc

Exercice N°1

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ et que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Interpréter.

b) Calculer et interpréter les limites suivantes : $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to -\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)$ et $\lim_{x\to +\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Construire, dans le repère précédent la courbe (C).

2) On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n par $\begin{cases} f_n(x) = xe^{\frac{n}{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$.

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère précédent $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que (C_n) est l'image de (C) par une homothétie h_n de centre O dont on précisera le rapport.

b) Montrer que tous les points M_n de (C_n) en lesquels la tangente est horizontale, sont situés sur une même droite Δ dont on donnera une équation.

c) Sans étudier f_2, déduire de ce qui précède le tableau de variation de f_2 et la construction de sa courbe (C_2) dans le même repère. Justifier.

Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Montrer que $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ puis calculer $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées .

d) Tracer la courbe (C).

2. a) Calculer $\int_0^x \ln(1+t)dt$ et déterminer la primitive F de f sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0 (On pourra écrire $f(x) = \ln(x+1) - 1 + \frac{1}{x+1}$).

b) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note A_n l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \frac{1}{n}$. Donner l'expression de A_n en fonction de n.

3) Dans la suite de l'exercice on prendra x réel tel que $x \in]0;1[$ et n un entier naturel non nul.

a) Montrer que pour tout n: $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}x^{k-1} + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$.

b) En déduire que : $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}dt$.

c) En utilisant a) et b) ; montrer que : $f(x) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1-k}{k}x^k + \frac{(-1)^{n+2}x^{n+2}}{x+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}dt$.

d) Montrer que : $0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \leq \frac{x^{n+2}}{n+2}$.

e) En déduire que : $f(x) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1-k}{k}x^k$.