Mr Kamel Bel Asri

Série de révision

Partie A

On considère la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité graphique est 2 cm.

1. a) Justifie que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) Donne une interprétation graphique du résultat obtenu précédemment.

2. a) Calcule $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Donne une interprétation graphique des résultats obtenus précédemment.

3. On suppose que f est dérivable sur ℝ et on note f' sa fonction dérivée.

a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$.

b) Justifie que :

* $\forall x \in]-\infty\,; 1-\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2}\,;+\infty[, f'(x) > 0$;

*$\forall x \in]1-\sqrt{2}\,;\,1+\sqrt{2}[, f'(x) < 0$.

c) Dresse le tableau de variation de f.

On ne calculera pas $f(1-\sqrt{2})$ et $f(1+\sqrt{2})$.

4. Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (C) point d'abscisse 0 est : $y = -x + 1$.

5. Soit h la fonction définie sur ℝ par : $h(x) = (1 + x)e^{-x} - 1$.

On suppose que h est dérivable sur ℝ et on note h' sa fonction dérivée.

a) Calcule $h'(x)$.

b) Étudie les variations de h.

c) Calcule $h(0)$ et dresse le tableau de variation de h.

On ne demande pas de calculer les limites de h.

d) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) \leq 0$.

e) Vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + x - 1 = (1 - x)h(x)$.

f) Déduis des questions précédentes la position relative de (C) et (T).

6. Trace la tangente (T) et la courbe (C).

On prendra : $f(1-\sqrt{2}) = 1{,}3$ et $f(1+\sqrt{2}) = -0{,}4$.

Partie B

Soit λ un nombre réel de l'intervalle $]1\,;+\infty[$ et $A(\lambda)$ l'aire en cm² de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

1. Démontre, en utilisant deux intégrations par parties, que : $A(\lambda) = (\frac{16}{e} - \frac{4(1+\lambda)^2}{e^{\lambda}})$ cm².

2. Détermine la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.