SUJET DE RÉVISION N°10 – MATHÉMATIQUES

SECTION : MATHÉMATIQUES **Proposé par : Mr. Maayoufi**

N.B. : Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Questions préliminaires :

Indiquer, **en le justifiant**, la réponse exacte :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$ égale à :
   a/ 0 b/ $+\infty$ c/ $-\infty$
2. Sur $\mathbb{R}_+^*$, la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ égale à :
   a / $\dfrac{e^x}{x(1+e^x)}$ b / $\dfrac{e^x(x+1)}{x^2}$ c / $\dfrac{x-1}{x^2e^{-x}}$
3. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x+2}{e^x-2}$ est :
   a/ paire b/ impaire c/ ni paire, ni impaire.
4. Soit ABC un triangle d'aire $\mathscr{A}$, et h une homothétie de rapport $-\sqrt{2}$, si $\mathscr{A}'$ est l'aire de la triangle ABC par h alors on a $\mathscr{A}'$ égale à :
   a/ $\mathscr{A}$ b/ $-\sqrt{2}\,\mathscr{A}$ c/ $2\mathscr{A}$

Exercice 1 :

Dans le plan orienté, ABCD est un rectangle tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AB = 2AD$.

On désigne par I, J et K les milieux respectives de [AB], [AI] et [AD] et par Δ la médiatrice de [ID].

I- Soit f la similitude qui transforme B en I et I en D.

1) Déterminer le rapport de f et montrer que $-\dfrac{\pi}{4}$ est une mesure de son angle.

2) Soit s la similitude directe de centre C, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

a- Montrer que $S(B) = I$.

b- Montrer que $f \circ s^{-1} = id_p$.

c- Déterminer la nature de triangle ICD.

II- Soit σ la similitude indirecte qui transforme D en B et de centre A.

1) Déterminer le rapport de σ. Déduire la forme réduite de σ.

2) Montrer que $\sigma(J) = D$.

3) Soit $\varphi = \sigma \circ S_{(AD)}$.

a- Caractériser φ.

b- Déterminer l'ensemble des points N du plan tel que : $\varphi(N) = \varphi(A)$.

Exercice 2 :

On pose pour $x > 0$, $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1) Justifier que f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2) a – Montrer que si $x \geq 1$, $f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}$.

b – En déduire : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

3) a – Montrer que si $x \leq 1$, $f(x) \leq e^x \ln x$.

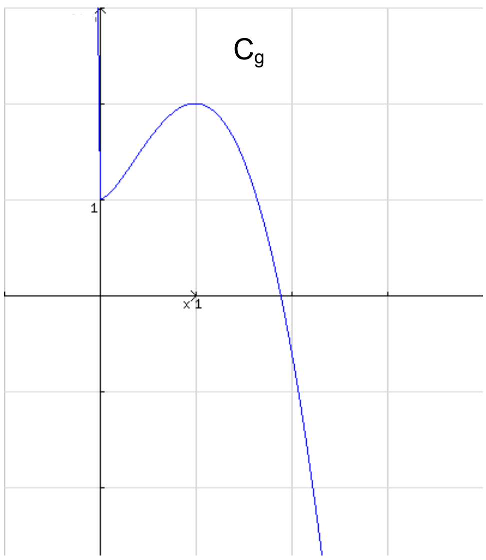
b – En déduire $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

4) a – Dresser le tableau de variations de f.

b – Tracer C_f.

Exercice 3 :

I – Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$. On note C_g sa courbe représentative dans un R.O.N (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). (figure ci-contre).



1) a – Déterminer le signe de g.

b – Justifier que la courbe de g coupe l'axe des abscisses en un seul point A d'abscisse α tel que $\alpha \in]1{,}8\,;1{,}9[$.

c – Résoudre graphiquement g(x)=0, g'(x)=0 et $g'(x) \leq 0$.

2) a – Calculer l'intégrale $I_\alpha = \int_1^\alpha x^2 \ln x \, dx$.

b – Montrer que : $I_\alpha = \frac{1}{18}(\alpha^3 + 3\alpha + 2)$.

c – En déduire la valeur $\bar{g}$ de la fonction g sur $[1\,;\alpha]$.

II – Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$.

Voir suite au verso

1) Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$.

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) Montrer que : $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$.

4) Tracer C_f.

III – Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x)=\int_{e^{-x}}^{e^x} f(t)dt$.

1) Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $H'(x)$.

2) Déduire que $H(x)=0$ pour tout réel x.

3) Soit $\mathscr{D}$ la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=e et soit $\mathscr{D}'$ la partie limitée par C_f, l'axe de abscisses et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=1$.

3-1- Hachurer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

3-2- Calculer $I=\int_{1/e}^{e} f(t)dt$. En déduire que $\mathscr{D}=\mathscr{D}'$.

IV – Soit (u_n) la suite définie par : $u_n=\int_n^{n+1} f(t)dt,\ n\geq 2$.

1) Montrer que : $f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$.

2) En déduire que (u_n) est décroissante.

3) Montrer que (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.