## Exercice1 :

Soit $\alpha$ un réel strictement supérieur à 1.

On désigne par $(u_n)$ la suite définie sur IN par : $u_0 = 2\alpha$ et pour tout $n \in$ IN, $u_{n+1} = \dfrac{\alpha^2 + u_n^2}{2u_n}$.

**1.** Montrer que pour tout $n \in$ IN, on a : $u_n > \alpha$.

**2.** Montrer que la suite $(u_n)$ est monotone. En déduire que $(u_n)$ est convergente.

**3.a.** Montrer que pour tout $n \in$ IN, on a : $0 < u_{n+1} - \alpha \leq \dfrac{1}{2}(u_n - \alpha)$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in$ IN, on a : $u_n - \alpha \leq \alpha\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**4.a.** Montrer que pour tout $n \in$ IN*, on a : $\alpha n < \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \leq \alpha n + \alpha\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$.

**b.** Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

## Exercice2 :

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

On définit la suite $(u_n)$ définie sur IN par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in$ IN, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**1.a.** Montrer que pour tout $n \in$ IN, $u_n > 0$.

**b.** Etudier la monotonie de la suite $(u_n)$. En déduire $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

**2.a.** Vérifier que pour tout $k \in$ IN, $\dfrac{1}{u_{k+1}^2} - \dfrac{1}{u_k^2} = 2 + u_k^2$. En déduire que pour tout $\in$ IN*, $\dfrac{1}{u_n^2} = 2n + 1 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k^2$.

**b.** Montrer que pour tout $n \in$ IN*, $u_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**4.** Pour tout $n \in$ IN*, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$.

**a.** Montrer que pour tout $x \in$ IR+, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq f(x) \leq x$.

**b.** Montrer que pour tout $n \in \times$, $\dfrac{n+1}{2n} - \dfrac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq S_n \leq \dfrac{n+1}{2n}$. (On donne $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in$ IN*).

**c.** En déduire que la suite $(S_n)$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

## Exercice3 :

On considère la suite $(u_n)$ définie sur IN par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in$ IN, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\left(1+\sqrt{u_n}\right)^2}$.

**1.a.** Montrer que pour tout $n \in$ IN, $u_n > 0$.

**b.** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante. En déduire que $(u_n)$ est convergente.

**2.** Soit $(v_n)$ la suite définie sur IN par : $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$.

**a.** Montrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison égale à 1.

**b.** Exprimer alors $v_n$ puis $u_n$ en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**3.** Pour tout $n \in$ IN*, on pose $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

**a.** Montrer que la suite $(s_n)$ est croissante.

**b.** Montrer que pour tout $k \in$ IN*, $u_k \leq \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. En déduire que pour tout $n \in$ IN*, $s_n \leq 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

**c.** Montrer alors que la suite $(s_n)$ est convergente et donner un encadrement de sa limite.

## Exercice4 :

On considère la suite $(u_n)$ définie sur IN* par : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{n^3 + k}$.

**1.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6(n^2+1)} \leq u_n \leq \dfrac{n(2n+1)}{6(n^2-n+1)}$.

(On donne $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}^*$).

**2.** En déduire que $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.

**Exercice5 :**

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$.

**1.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\sqrt{2n}}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$.

**2.** Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par : $f(x) = 1 - x - \cos x$.

Etudier les variations de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos x \geq 1 - x$.

**3.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq u_n \leq 1$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**Exercice6 :**

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

**1.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

**b.** Etudier la monotonie de la suite $(u_n)$.

**2.a.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de $u_k^2$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1}^2 - u_k^2\right) = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{u_k^2}$ et que $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{u_k^2}$.

**c.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 \geq 2n+1$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**Exercice7 :**

**1.** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2 + \dfrac{n^2}{u_n}$.

**a.** Montrer, par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2$, $n < u_n < n+1$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**b.** Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

**2.** Soit $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - n} - 1$.

**a.** Calculer $v_1$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n + \dfrac{1}{n}}$.

**b.** Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \dfrac{1}{n} \leq v_n \leq 1$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - n)$.

**3.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k v_k$.

**a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n - \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k(v_k - 1)$.

**b.** Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\left|k(v_k - 1)\right| \leq 1$.

**c.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|s_n - \dfrac{n+1}{2n}\right| \leq \dfrac{1}{n}$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$.

**Exercice8 :**

Soit f la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-2}$.

**1.** Etudier les variations de f sur $[2, +\infty[$.

**2.** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.

**b.** Montrer que la suite $(u_n)$ est monotone. En déduire que $(u_n)$ est convergente et précisera limite.

**3.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{2}(u_n - 2)$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**4.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{2}{n^4}\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 u_k = \frac{2}{n^4}\left(u_1 + 2^3 u_2 + ... + n^3 u_n\right)$.

**a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{2}{n^4}\sum\limits_{k=1}^{n} k^3(u_k - 2)$.

**c.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|S_n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right| \leq \frac{4}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

**<u>Exerice9 :</u>**

Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}$.

**1.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

**2.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 - u_n^2 \geq 4$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2\sqrt{n}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**3.** Soit $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq 4 + \frac{1}{n}$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

**4.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2k} \leq \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$.

**5.** Soit $(S_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$.

**a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq 4n + 2\sqrt{n}$.

**b.** Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{u_n^2}{n}\right)$.

**<u>Exercice10 :</u>**

On considère les suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_n = \frac{7}{u_n}$.

**1.** Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

**2.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.

**c.** Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \geq 0$.

**3.** Montrer que la suite $(u_n)$ et décroissante. En déduire que la suite $(v_n)$ est croissante.

**4.a.** En s'aidant de la question **2.c**) et de la question **3.b**), démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \frac{21}{8}$.

**b.** Utiliser le résultat précédent et le résultat **2.b**), pour tout démontrer que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2$.

**c.** En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n - 1}}$.

**d.** Sachant que $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{10^{2^n - 1}}\right) = 0$, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n - v_n)$.

**5.** Conclure que les suite $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes et déterminer leur limite commune.