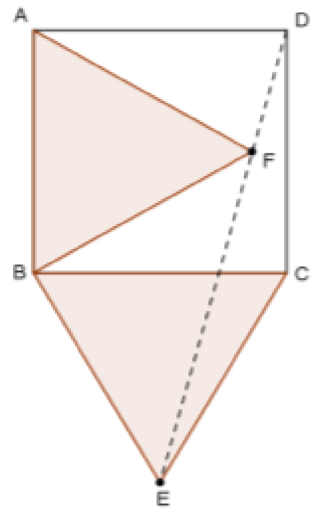
EXERCICE N1 :



Soit un carré ABCD tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Construire à l'intérieur du carré un triangle équilatéral ABF et à l'extérieur du carré un triangle équilatéral BCE.

1) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{EF}}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

3) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}}) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$. En déduire que E, F et D sont alignés.

4) Déterminer $(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{AB}})$. En déduire que les droites (EC) et (AF) sont perpendiculaires.

EXERCICE N2 :

Le plan étant orienté dans le sens direct. On donne un segment [AB].

1) construire l'ensemble L_1 des points M du plan tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

∗ On note $\mathcal{C}$ le cercle qui contient l'ensemble L_1 (son centre est noté O)

2) Soit le point E tel que EAB est un triangle isocèle en E et que $\left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

On note L_2 l'ensemble des points M du plan tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

a) Montrer que le point $E \in L_2$.

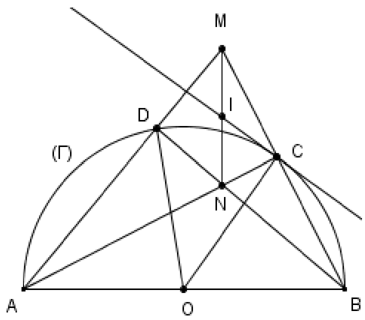
b) Déterminer l'ensemble L_2.

3) La bissectrice de [OA,OE] coupe (AB) en D et la droite (ED) recoupe $\mathcal{C}$ en C

a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BA}}\right)[\pi]$.

b) En déduire que A, C, O et D sont situés sur un même cercle.

EXERCICE N3 :



Soit (Γ) un demi-cercle de diamètre [AB] du plan orienté dans le sens direct. On pose O le milieu de [AB]. Soit C et D deux points de (Γ) tels que $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Les droites (AC) et (BD) se coupent en N et les droites (BC) et (AD) se coupent en M. Soit I le milieu de [MN].

1) a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{3\pi}{8}\ [\pi]$.

b) En déduire que $2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

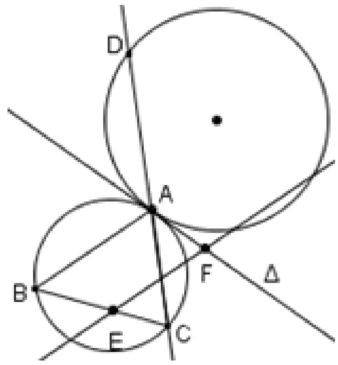
2) a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{ND}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}})\ [\pi]$

b) En déduire que $2(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) \equiv \frac{-3\pi}{4}\ [2\pi]$.

3) Montrer que la droite (IC) est tangente à (Γ).

EXERCICE N4 :

Dans un plan orienté, on considère un triangle ABC inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$. On désigne par Δ la tangente à $\mathcal{C}$ en A. Soit E un point du segment [BC] distinct de O. La parallèle à (AB) passant par E coupe Δ en F.



1) Montrer que E, C, A et F appartienne à un même cercle.

2) Soit $\mathcal{C}'$ un cercle tangent extérieurement à $\mathcal{C}$ en A. La droite (AC) recoupe $\mathcal{C}'$ en un point D.

a) Montrer que pour tout point M de l'arc orienté AD du cercle $\mathcal{C}'$ distinct de A et D on a : $(\widehat{\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MA}}) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}}\right) + \pi\ [2\pi]$

b) En déduire que pour tout point M de l'arc orienté AD du cercle $\mathcal{C}'$ distinct de A et D on a : $(\widehat{\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MA}}) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\ [2\pi]$

EXERCICE N5 :

Sana utiliser une calculatrice, calculer chacune des expressions suivantes :

$A = \cos^2\frac{\pi}{5} + \cos^2\frac{6\pi}{5} + \cos^2\frac{3\pi}{10} + \cos^2\frac{7\pi}{10}$ et $B = \cos\frac{\pi}{7} \times \cos\frac{5\pi}{14} - \sin\frac{\pi}{7} \times \sin\frac{5\pi}{14}$

EXERCICE N6 :

Soit la fonction f définie sur $IR\backslash\{k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$ par $f(x)= \frac{\sin(4x)}{4\sin x}$ 1)

Montrer que $f(\frac{\pi}{5}) = \frac{1}{4}$

2) Montrer que pour tout $x \in D_f$ on a : $f(x)= 2\cos^3 x - \cos x$

3) En déduire que $\cos\frac{\pi}{5}$ est solution de l'équation : $8x^3 - 4x - 1 = 0$

EXERCICE N7 :

On considère l'expression $A(x)=\sin(2x - \frac{19\pi}{2}) - 2\sin^2(3\pi + x)$; x est un réel.

1) Montrer que $A(x)=\cos 2x - 2\sin^2 x$

2) Montrer alors que $A(x)=4\cos^2 x - 3$ pour tout réel x.

3) En déduire que $A(x)=2\cos(2x) - 1$ pour tout réel x.

4) Montrer que $A(\frac{\pi}{8})=\sqrt{2} - 1$. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{8}$

EXERCICE N8 :

On considère pour tout réel x, l'expression $A(x)=\sqrt{3}.\cos 2x-\sin 2x-1$

1) Montrer que $A(x)=r.\cos(2x+\theta)-1$ (où r et θ sont deux réels qu'on précisera)

2) En remarquant que $2x+\frac{\pi}{6}=2.(x+\frac{\pi}{12})$, déduire que $A(x)=1-4.\sin^2(x+\frac{\pi}{12})$

3) a) Vérifier que $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

b) Vérifier que $A(0)=\sqrt{3}-1$

c) En déduire que : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

EXERCICE N9 :

1) Résoudre dans IR puis dans $]-\pi,\pi]$ chacune des équations suivantes :

$\cos^2 x+4\cos x+3=0$; $\cos(x-\frac{\pi}{3})=\sin(3x+\frac{\pi}{3})$; $\tan(3x)=\tan(x+\frac{\pi}{3})$

2) Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ les inéquations suivantes :

$2\sin x+1\geq 0$; $\sqrt{2}.\cos x+1\geq 0$; $\sin(x+\frac{\pi}{6})<\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos^2 x+4\cos x+3\leq 0$

3) a) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'inéquation $\cos(2x-\frac{\pi}{6})\leq 0$

b) En déduire le tableau de signe de $\cos(2x-\frac{\pi}{6})$

EXERCICE N10 :

Soit l'expression $A(x)=2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-2\cos^2 x-1$; pour tout $x\in$ IR

1) Montrer que $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sin 2x}{2}$

2) En déduire que $A(x)=-2\cos x.(\sin x+\cos x)$

3) Montrer alors que $A(x)=-2\sqrt{2}.\cos x.\cos(x-\frac{\pi}{4})$

4)Résoudre alors dans $]-\pi,\pi]$ puis dans IR l'inéquation : $A(x)\geq 0$

EXERCICE N11 :

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct. Soit A le point du plan de coordonnées polaires $(2\ ,\frac{\pi}{4})$.

On donne le point B du plan de coordonnées cartésiennes $(\sqrt{6}-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{6}+\sqrt{2})$.

1) Vérifier que les coordonnées cartésiennes du point A sont $(\sqrt{2},\sqrt{2})$

2) a) Calculer : $\cos(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ et $\sin(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

b) En déduire que le point B a pour coordonnées polaires $(4,\frac{5\pi}{12})$

3) Déterminer alors les valeurs exactes de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$

4) Soit M un point du plan de cordonnées cartésiennes $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ avec $\theta\in$ IR.

a) Montrer que $\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})=2\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$

b) Déterminer les valeurs de θ dans $]-\pi,\pi]$ pour lesquelles les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires.

c) Déterminer les valeurs de θ dans $]-\pi,\pi]$ pour lesquelles : $\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) \geq 1$

EXERCICE N12 :

Montrer les relations suivantes :

$\sin(3x)=3\sin x-4\sin^3 x$; $\cos(4x)= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

$\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2$; $\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\tan\frac{x}{2}$; $\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}$