EXERCICE N°1

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ est un angle orienté de deux vecteurs du plan orienté P tel

que $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} \equiv -\dfrac{2003\pi}{5}\ [2\pi]$.

1/ Déterminer la mesure principale α de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

2/ Le réel $\beta = \dfrac{1303}{5}\pi$ est-il une mesure de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$?

3/ Soit C un point du plan tel que $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})} \equiv -\dfrac{1098\pi}{5}\ [2\pi]$.

Montrer que $[OC)=S_O([OB))$.

CORRECTION

1/ $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} \equiv -\dfrac{2003\pi}{5}\ [2\pi]$

Or en faisant la division Euclidienne de 2003 par 5 on obtient

$2003 = 400 \times 5 + 3$

donc $\dfrac{2003}{5} = 400 + \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow -\dfrac{2003\pi}{5} = 400\pi - \dfrac{3\pi}{5}$

$\Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} \equiv 200(2\pi) - \dfrac{3\pi}{5}\ \ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} \equiv -\dfrac{3\pi}{5}\ \ [2\pi]$

et comme $-\dfrac{3\pi}{5} \in]-\pi;\pi]$ alors $\alpha=-\dfrac{3\pi}{5}$ est la mesure principale de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$

2/ Pour que β soit une mesure de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ il faut que $\beta \equiv \alpha\ \ [2\pi]$

Or $\beta - \alpha = \dfrac{1303}{5}\pi + \dfrac{3\pi}{5} = \dfrac{1306}{5}\pi = \dfrac{653}{5}(2\pi)$

et comme $\dfrac{653}{5} \notin \mathbb{Z}$ alors $\beta \not\equiv \alpha\ \ [2\pi]$

par suite β n'est pas une mesure de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

3/ $\widehat{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})} + \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})}\ \ [2\pi]$

$\equiv -\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} - \dfrac{1098}{5}\pi\ \ [2\pi]$

$\equiv \dfrac{3\pi}{5} - \dfrac{1098}{5}\pi\ \ [2\pi]$

$\equiv -\dfrac{1095}{5}\pi\ \ [2\pi] \equiv -219\pi\ \ [2\pi]$

$\equiv \underbrace{-219\pi - \pi} + \pi\ \ [2\pi]$

$\equiv \pi\ \ [2\pi]$

Ainsi $\widehat{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})} \equiv \pi\ \ [2\pi]$ par suite $[OC) = S_O([OB))$

EXERCICE N°2

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que

$\widehat{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})} \equiv -\frac{19\pi}{5}\ [2\pi]$. Désignons par I le milieu de [BC].

1/ Le réel $\frac{89\pi}{5}$ est-il une mesure de $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$?

2/ Déterminer θ la mesure principale en radian de $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$.

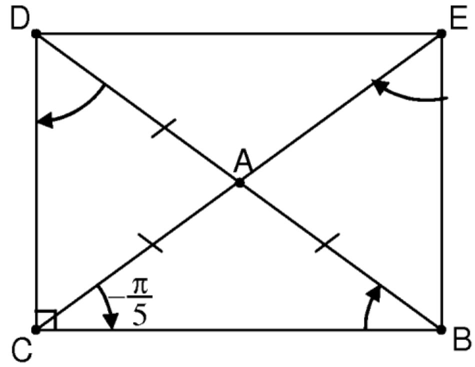
3/ Soit D le symétrique de B par rapport à A.

a) Montrer que BDC est un triangle rectangle en C.

b) Donner une mesure de $(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC})$

4/ Soit E le point tel que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB}$. Montrer que $\widehat{(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EC})} \equiv \frac{3}{10}\pi\ [2\pi]$.

CORRECTION :



1/ ABC est un triangle isocèle de sommet principal A

$\overset{th}{\Rightarrow} \widehat{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})} \equiv -\widehat{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})} \equiv -\left(-\frac{19\pi}{5}\right)\ [2\pi] \equiv \frac{19\pi}{5}\ [2\pi]$

D'où $\frac{19\pi}{5} \equiv \theta'\ [2\pi]$ avec θ' désigne la mesure principale en radian de $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$

Pour que $\frac{89\pi}{5}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$ il faut que $\frac{89\pi}{5} \equiv \theta'\ [2\pi]$

par suite il faut que $\frac{89\pi}{5} - \frac{19\pi}{5} \equiv 0\ [2\pi]$.

Or $\frac{89\pi}{5} - \frac{19\pi}{5} = \frac{70\pi}{5} = 14\pi = 7(2\pi)$

$\Rightarrow \frac{89\pi}{5} - \frac{19\pi}{5} \equiv 0\ [2\pi]$

Conclusion : $\frac{89\pi}{5}$ est une mesure de $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$.

2/ $\widehat{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})} \equiv \frac{19\pi}{5}\ [2\pi] \Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})} \equiv 4\pi - \frac{\pi}{5}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})} \equiv -\frac{\pi}{5}\ [2\pi]$

comme $-\frac{\pi}{5} \in]-\pi;\pi]$ alors $\theta=-\frac{\pi}{5}$ est la mesure principale de $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$

3/**a**) D est le symétrique de B par rapport à A

$\Leftrightarrow A = B * D$

De plus $AB = AC$

donc C appartient au cercle de diamètre [BD]

alors BDC est un triangle rectangle en C.

b) $\widehat{(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD})} + \widehat{(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB})} \equiv \pi \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC})} \equiv \pi - \widehat{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD})} - \widehat{(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB})} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC})} \equiv \pi - \widehat{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD})} + \widehat{(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB})} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC})} \equiv \pi - \left(\frac{\pi}{5}\right) + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC})} \equiv \frac{3}{10}\pi \quad [2\pi]$

4/ $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow$ DEBC est un parallélogramme

$\widehat{(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EC})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{CD})} + \widehat{(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA})} + \widehat{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{EC})} \quad [2\pi]$

$\equiv \pi + \widehat{(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC})} + \pi \quad [2\pi]$ car ACD est usocèle en A

$\equiv \widehat{(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC})} \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{3}{10}\pi \quad [2\pi]$

EXERCICE N°3

On donne un triangle ABC tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)} \equiv \frac{5\pi}{21} \quad [2\pi]$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$. Soit le triangle ABE isocèle en B tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}\right)} \equiv \frac{3\pi}{7} \quad [2\pi]$. Soit aussi le triangle ACD rectangle en C, de sens direct et $\widehat{\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}\right)} \equiv -\frac{3\pi}{14} \quad [2\pi]$.

1/ Montrer que $\widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)} \equiv \frac{2\pi}{7} \quad [2\pi]$.

2/ Prouver que E, A et D sont alignés.

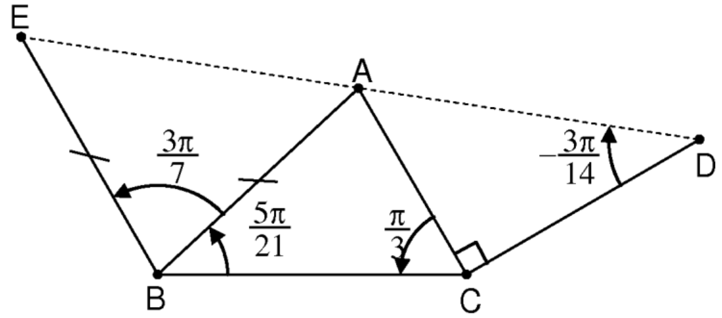
CORRECTION

1/ ABE est un triangle isocèle en B

Donc $\widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}\right)} \quad [\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{3\pi}{7} \quad [\pi]$.

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)} \equiv \frac{2\pi}{7} \quad [\pi]$



$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)} = \frac{2\pi}{7} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)} = \frac{2\pi}{7}+2k'\pi$ ou $\widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)} = \frac{2\pi}{7}+(2k'+1)\pi$ avec $k' \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)} \equiv \frac{2\pi}{7} \ [2\pi]$ ou $\widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)} \equiv \frac{2\pi}{7} + \pi \ [2\pi]$

- Supposons que $\widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)} \equiv \frac{2\pi}{7} + \pi \ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)} \equiv -\frac{3\pi}{7} \ [2\pi]$ car $\frac{2\pi}{7} + \pi = 2\pi - \frac{3\pi}{7}$

Donc $\widehat{EAB} = \frac{3\pi}{7}$ et aussi $\widehat{AEB} = \frac{3\pi}{7}$

et on a déjà $\widehat{ABE} = \frac{3\pi}{7}$ car $\widehat{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}\right)} \equiv \frac{3\pi}{7} \ [2\pi]$

Or $\widehat{EAB} + \widehat{AEB} + \widehat{ABE} = \pi \Leftrightarrow \frac{9\pi}{7} = \pi$

$\Leftrightarrow \frac{9}{7} = 1$ **impossible**

donc notre supposition est fausse

par suite $\widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)} \equiv \frac{2\pi}{7} \ [2\pi]$.

2/ $\widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)} \ [\pi]$

- $\widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)} \equiv \frac{2\pi}{7} \ [2\pi] \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)} \equiv \frac{2\pi}{7} \ [\pi]$.

- $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \pi - \widehat{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)} - \widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)} \ [2\pi]$

$\equiv \pi - \frac{5\pi}{21} - \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$

$\equiv \frac{3}{7}\pi \ [2\pi]$

$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \frac{3}{7}\pi \ [\pi]$.

- $\widehat{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \pi - \widehat{\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)} - \widehat{\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)} \ [2\pi]$

$\equiv \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{3}{14}\pi \ [2\pi]$

$\equiv \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{3}{14}\pi \ [2\pi]$

$\equiv \frac{2\pi}{7} \ [2\pi]$

$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{2\pi}{7} \ [\pi]$

Ainsi

$\widehat{\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{2\pi}{7} + \frac{3\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} \ [\pi]$

$\equiv \frac{7\pi}{7} \ [\pi]$

$\equiv 0 \ [\pi]$

Par suite E, A et D sont alignés.

EXERCICE N°4

Dans le plan orienté P dans le sens direct, on considère le triangle ABC tel que
$\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})} \equiv -\frac{95\pi}{7}\ [2\pi]$ et $\widehat{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})} \equiv \frac{138\pi}{7}\ [2\pi]$.

1/ Donner les mesures principales de $\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})}$.

2/ Calcculer $\widehat{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})}$; déterminer la nature du triangle ABC.

3/ Posons I le milieu de [BC]. Soit E le point de P vérifiant :E $\in \Delta$ la médiatrice de [BC] et $\widehat{(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EI})} \equiv \frac{3\pi}{28}\ [2\pi]$. Le cecle $\mathcal{C}$ de centre A et passant par B coupe [IA) en N. Montrer que E = N.

CORRECTION

1/ •
$$\begin{aligned}\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})} &\equiv -\frac{95\pi}{7}\ [2\pi]\\ &\equiv -\frac{(28\times 7-3)\pi}{7}\ [2\pi]\\ &\equiv -28\pi+\frac{3\pi}{7}\ [2\pi]\\ &\equiv \frac{3\pi}{7}\ [2\pi]\end{aligned}$$

Comme $\frac{3\pi}{7} \in \left]-\pi;\pi\right]$ alors $\frac{3\pi}{7}$ est la mesure principale de $\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}$.

• $\widehat{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})} \equiv \frac{138\pi}{7}\ [2\pi] \Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})} \equiv 20\pi-\frac{2\pi}{7}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})} \equiv -\frac{2\pi}{7}\ [2\pi]$

Comme $\frac{-2\pi}{7} \in \left]-\pi;\pi\right]$ alors $\frac{-2\pi}{7}$ est la mesure principale de $\widehat{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})}$.

2/
$$\begin{aligned}\widehat{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})} &\equiv \widehat{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{AB})}+\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB})}\ [2\pi]\\ &\equiv \pi+\widehat{(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})}+\widehat{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})}\ [2\pi]\\ &\equiv \pi-\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}-\frac{2\pi}{7}\ [2\pi]\\ &\equiv \pi-\frac{3\pi}{7}-\frac{2\pi}{7}\ [2\pi]\\ &\equiv \frac{2\pi}{7}\ [2\pi].\end{aligned}$$

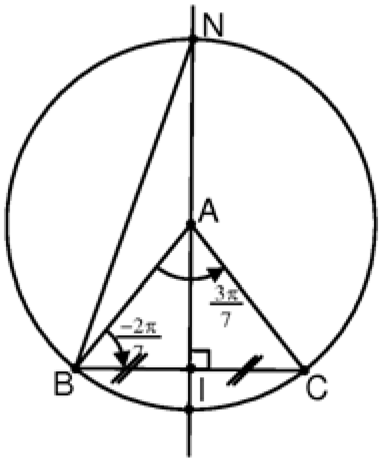
Comme $\widehat{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})}\ [2\pi]$ alors ABC est un triangle isocèle en A

3/ ▸ Désignons par N′ le second point de rencontre $\mathcal{C}$ et (AI).

▸ ABC est isocèle en A et I = B ∗ C

$$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)} \equiv \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \quad [2\pi]$$

$$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)} \equiv \frac{3\pi}{14} \quad [2\pi].$$



...... Or $\widehat{\left(\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NN'}\right)} \equiv \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AN'}\right)} \quad [2\pi]$

$$\equiv \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)} \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{1}{2}\frac{3\pi}{14} \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{3\pi}{28} \quad [2\pi]$$

Donc $\widehat{\left(\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NI}\right)} \equiv \frac{3\pi}{28} \quad [2\pi]$ **car** I ∈ [NN′].

D'autre part aussi E ∈ Δ = méd[BC] et $\widehat{\left(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EI}\right)} \equiv \frac{3\pi}{28} \quad [2\pi]$

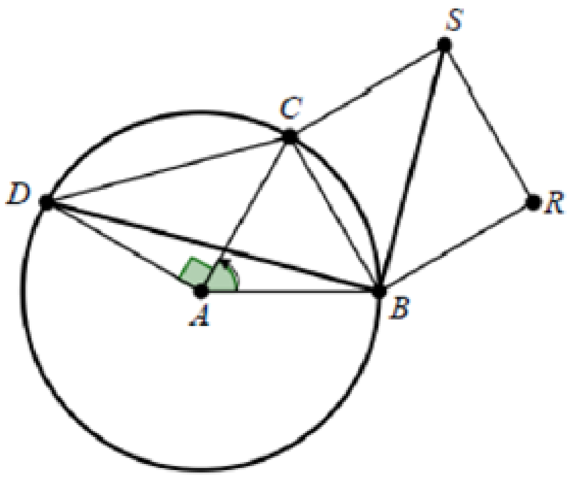
Alors N = E.

EXERCICE N°5

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un cercle Γ de centre A et de rayon 4. Soient B, C et D trois points de (C) tels que

$\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

On considère le carré BRSC. (Voir figure ci-dessous)



1) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BA})$.

2)**a** – Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$.

b – En déduire que $\widehat{\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)} \equiv \frac{\pi}{12} \quad [2\pi]$

3) Déduire de ce qui précède que (BS) ⊥ (DB).

4) Déterminer l'ensemble E des points M vérifiant $\widehat{\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\right)} \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$.

CORRECTION

1) $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})}\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

. $\widehat{(\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BA})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})}\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ car BRSC est un carré direct

$\equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$.

2)a- $(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})$ est un angle orienté inscrit dans Γ qui intersepte l'arc $\overset{\frown}{BC}$

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est un angle orienté au centre de Γ qui intersepte l'arc $\overset{\frown}{BC}$

Donc $\widehat{(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})} \equiv \frac{1}{2}\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

b- $\widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})} + \widehat{(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB})}\ [2\pi]$

$\equiv \widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})} - \widehat{(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})}\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

(car DAC est un triangle direct, isocèle et rectangle en A)

$\equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$.

3/ $\widehat{(\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BD})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})}\ [2\pi]$

$\equiv \frac{7\pi}{12} - \widehat{(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})}\ [2\pi]$

$\equiv \frac{7\pi}{12} - \widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})}\ [2\pi]$ car ABD est isocèle en A.

$\equiv \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\ [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

D'où $(BS) \perp (BD)$.

4/ $M \in E \Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB})} \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow M \in \overset{\frown}{CB} \setminus \{C;B\}$ avec $\overset{\frown}{CB} \subset \Gamma$

Conclusion :

L'ensemble E est l'arc orienté $\overset{\frown}{CB}$ de Γ privé des point C et B.

EXERCICE N°6

Soit ABC un triangle rectangle en A et de sens direct tel que

$\widehat{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})} \equiv \frac{1999\pi}{3}\ [2\pi]$.

1/a) Montrer que la mesure principale de $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$ est $\frac{\pi}{3}$

b) faire une figure.

2/ Désignons par I le milieu du segment $[BC]$, J est le point d'intersection de la médiatrice de $[AI]$ et celle de $[BC]$.

a) Prouver que $\frac{\pi}{6}$ est la mesure principale de chacun des angles orientés $\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CJ}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CJ}; \overrightarrow{CI}\right)$.

b) Montrer alors que $\widehat{\left(\overrightarrow{JB}; \overrightarrow{JA}\right)} \equiv \pi\ [2\pi]$.

3/ Désignons par D le point d'intersection de (CJ) et $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Prouver que DBA est un triangle isocèle en D.

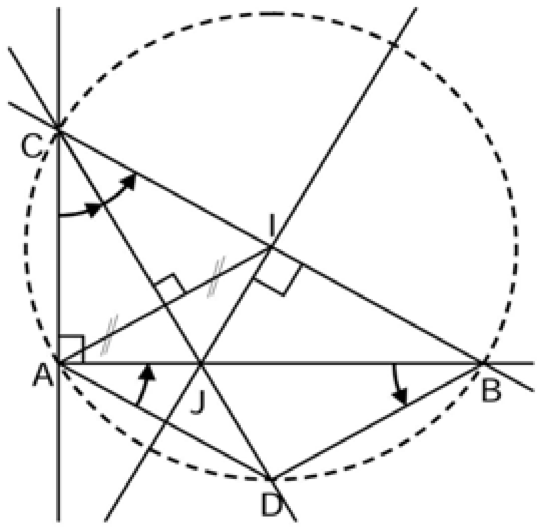
CORRECTION

1/a) $1999 = 666 \times 3 + 1 \Rightarrow \frac{1999\pi}{3} = 333 \times (2\pi) + \frac{\pi}{3}$

Donc $\widehat{\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Comme $\frac{\pi}{3} \in]-\pi, \pi]$ donc $\frac{\pi}{3}$ est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}\right)$.

b)



2/a) (CJ) est la médiatrice du segment $[AI]$ et C et J sont de part et d'autre de (AI) alors (CJ) est la bissectrice intérieure du secteur $[CA, CI]$

par suite $\widehat{\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CJ}\right)} \equiv \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CI}\right)}\ [2\pi]$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{CJ}; \overrightarrow{CI}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CJ}\right)}[2\pi]$

Alors $\widehat{\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CJ}\right)} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{CJ}; \overrightarrow{CI}\right)} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

Comme $\frac{\pi}{6} \in]-\pi, \pi]$ alors $\frac{\pi}{6}$ est la mesure principale de chacun des angles orientés $\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CJ}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CJ}; \overrightarrow{CI}\right)$.

b) $\widehat{\left(\overrightarrow{JB}; \overrightarrow{JA}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{JB}; \overrightarrow{JC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{JC}; \overrightarrow{JA}\right)}\ [2\pi]$

$\equiv \pi - 2\widehat{\left(\overrightarrow{CJ}; \overrightarrow{CB}\right)} + \pi - \left[\widehat{\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CJ}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{AJ}; \overrightarrow{AC}\right)}\right]\ [2\pi]$

(car JB=JC)

$\equiv \pi - 2 \times \frac{\pi}{6} + \pi - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \pi\ [2\pi]$

3/ • $\widehat{(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA})}\ [2\pi]$ car B et C sont dans $\overset{\frown}{DA}$.

$$\equiv \widehat{(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CJ})} + \widehat{(\overrightarrow{CJ};\overrightarrow{CA})}\ [2\pi]$$

$$\equiv 0 + \frac{-\pi}{6}\ [2\pi]$$

• $\widehat{(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB})}\ [2\pi]$ car A et C sont dans $\overset{\frown}{BD}$.

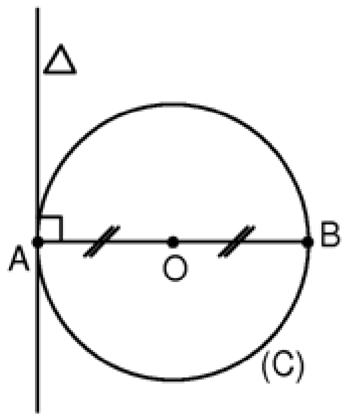
$$\equiv \widehat{(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB})} + \widehat{(\overrightarrow{CJ};\overrightarrow{CB})}\ [2\pi]$$

$$\equiv 0 + \frac{-\pi}{6}\ [2\pi]$$

Par suite $\widehat{(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})}\ [2\pi]$ ce qui permet de dire que DAB est un triangle isocèle en D.

EXERCICE N°7

Choisir la bonne proposition.
Dans le plan P orienté dans le sens direct on considère la figure ci-dessous: (C) est le cercle de diamètre [AB], Δ est la perpendiculaire à (AB) en A.



E={M∈ P /	[AB)\{A}	[AB]\{A, B}	[AB)	$\overset{\frown}{BA}$ \{A, B}	(C)\{A, B}	Δ
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = 0$ }						
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = AM \times AB$ }						
$\widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})} \equiv 0\ [2\pi]$ }						
$\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})} \equiv \pi\ [2\pi]$ }						
$\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$}						
$\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})} = \frac{\pi}{2} + k\pi$; avec $k \in \mathbb{Z}$ }						