Série de révision n ° 1

Dans tous les exercices le plan est orienté.

Exercice 1 :
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère les points d'affixes respectives : $z_A = -\sqrt{3} + 3i$ et $z_B = 1 - i$.

1. Ecrire z_A et z_B sous forme trigonométrique.
2. Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
3. a) Ecrire $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
   b) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.
4. Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tel que :
   a) $|z + \sqrt{3} - 3i| = |z - 1 + i|$.
   b) $|z - 1 + i| = 2$.

Exercice 2 :
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère les points d'affixes respectives : $z_A = -1 - i$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = \sqrt{3} - i$.

1. a) Placer les points A,B et C.
   b) Montrer que le triangle ABC est rectangle .
   c) Donner l'écriture cartésienne des nombres complexes z_A^2 et $\frac{z_A}{z_B}$.
2. a) Déterminer une écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes z_A z_B et z_C.
   b) Déterminer une écriture trigonométrique du nombre complexe $\frac{z_A}{z_B}$.
   c) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.
3. a) Montrer que $OB = OC$.
   b) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$
   c) En déduire que B est l'image de C par une rotation que l'on précisera .
4. Déterminer et construire les ensembles suivants :
   a) $E = \{M(z) \in P\ ;\ |z + 1 + i| = 2\}$.
   b) $F = \{M(z) \in P\ ;\ |iz + \sqrt{3} + i| = |\sqrt{3} - i|\}$.
   c) $G = \{M(z) \in P\ ;\ \dfrac{iz + \sqrt{3} + i}{z + 1 + i} \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3 :
Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
$E = S_{(AD)}(O)$; $I = S_{(C)}(B)$; $(AE) \cap (BC) = \{J\}$ et $K = I * J$.

1. Faire un schéma .
2. a) Montrer qu'il existe une unique rotation R tel que tels que $R(A) = C$ et $R(E) = O$.
   b) Déterminer l'angle et le centre de la rotation .
3. a) Déterminer $R((AB))$ et $R((BD))$.
   b) En déduire $R(B) = I$.

4. Soit R' la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ tel que $R'(J) = E$ et $R'(E) = I$.
   a) Déterminer $R' \circ R'(J)$.
   b) Déduire que K est le centre de R' .
5. Siot ζ le cercle circonscrit au triangle IEJ ; M un point du segment $[EJ]$, la demi-droite $[CM)$ coupe ζ en F et $R'(F) = L$.
   a) Montrer que $L \in \zeta$.
   b) Déterminer l'ensemble des points L lorsque M décrit le segment $[EJ]$.
6. Qu'elle est la nature de $R \circ R'$? Justifier votre réponse .

***Exercice* 4 :**

On considère un triangle ABC isocèle en A tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par P le point du segment $[BC]$ tel que $CP = CA$. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Faire une figure.
2. Montrer qu'il existe une rotation R tel que $R(A) = P$ et $R(B) = C$.
3. Déterminer une mesure de l'angle de R et construire son centre O.
4. Soit $f = R \circ R$.
   a) Caractériser f.
   b) Construire le point $Q = f(A)$. Montrer que $Q \in [AC]$.
   c) Déduire que $R(P) = Q$.
   d) Montrer que $(OP) \perp (AC)$.
5. Soit I le milieu de $[AP]$ et J le milieu de $[PQ]$. On pose $R(C) = C'$.
   a) Montrer que $R(I) = J$.
   b) Déduire que $C' \in (OJ)$.
   c) Montrer que C' est sur la perpendiculaire à (BC) menée de P.
   d) Construire alors C'.