Série de révision n°3

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 4}{x - 1}$ et C_f sa courbe représentative.

1. a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
   b) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
   c) En déduire l'équation de l'asymptote verticale Δ.
2. Déterminer trois réels a , b et c : pour tout $x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
3. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote oblique pour C_f.
   b) Etudier la position relative de C_f par rapport à (D).
4. a) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variations de f.
   c) Donner une équation de la tangente à C_f en 3.
   d) Préciser les extrémums de f.
5. Construire C_f.
6. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 1}$.
   a) Préciser l'ensemble de définition de g.
   b) Montrer que g est une fonction paire.
   c) Construire la courbe de g à partir de celle de f.
7. Soit la fonction h définie sur $]1, +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{f(x)}$.
   a) Montrer que h est dérivable sur $]1, +\infty[$.
   b) Dresser le tableau de variation de h.
   c) calculer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   d) Tracer dans le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe de h avec une autre couleur.

Exercice 2 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$.

1. Déterminer a et b pour que la courbe représentative de f soit tangente à la droite (D) d'équation $y = 4x + 3$ au point $I(0, 3)$.
2. Dans la suite en prend $a = 4$ et $b = 3$.
   a) Déterminer les réelles α et β tel que $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta x}{x^2 + 1}$.
   b) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f. Interpréter graphiquement ces résultats.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. a) Montrer que le point $I(0, 3)$ est un centre de symétrie de ζ_f.
   b) Etudier la position relative de ζ_f par rapport à (D) au point I.
5. Construire la courbe ζ_f.
6. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} f(x) \ si\ x < 0 \\ 3 + \sqrt{x^2 + x} \ si\ x \geqslant 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue en 0.
b) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0.Interpréter graphiquement ce résultat.
c) Montrer que la droite $\Delta : y = x + \dfrac{7}{2}$ est une asymptote à la courbe de ζ_g au voisinage de $+\infty$.

7. Dresser le tableau de variation de g.
8. Tracer la courbe ζ_g dans le même repère.

Exercice 3 :

Partie A

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -3$.
   b) Développer $(z-1)^2$ puis déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
2. Soit l'équation $(E) : z^3 + 8 = 0$.
   a) Vérifier que $z^3 + 8 = (z+2)(z^2 - 2z + 4)$.
   b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

Partie B

On considère les points d'affixes respectives : $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = -2$.

1. a) Ecrire z_A , z_B , et z_C sous forme trigonométrique .
   b) Déduire que les points A , B et C appartiennent au cercle (C) de centre O et de rayon 2.
   c) Placer les points A , B et C.
2. a) Calculer les distances AB , AC et BC.
   b) Déduire la nature du triangle ABC .
   c) Déterminer l'affixe z_D du point D pour lequel $ABCD$ soit un losange .
3. Soit $\Gamma = \{M(z) \in P \, ; arg(\dfrac{z^2}{1 + i\sqrt{3}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]\}$.Déterminer et construire Γ.

Exercice 4 :

On considère les points d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z_B = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $z_C = -\sqrt{3} + i$.

1. Déterminer la nature des ensembles suivants :
   $\Delta = \{M(z) \in P \, ; \, |z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}| = |z|\}$.
   $\Gamma = \{M(z) \in P \, ; \, |i\overline{z} - 1 + i\sqrt{3}| = 2\}$.
2. a) Ecrire z_A , z_B , et z_C sous forme trigonométrique .
   b) Déduire que les points A , B et C appartiennent au cercle (C) de centre O et de rayon 2.
   c) Placer les points A , B et C.
3. Déterminer l'affixe z_D du point D pour lequel $ABCD$ soit un parallélogramme .
4. On donne le nombre complexe $U = z_B.z_C$.
   a) Ecrire U sous la forme cartésienne .
   b) Ecrire U sous la forme trigonométrique .
   c) Donner alors les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$ puis déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 5 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On désigne par A et B les points d'affixes respectives : $z_A = 2i$ et $z_B = -i$.

A tout point M différent de A d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \dfrac{z}{iz+2}$.

1. a) Déterminer la forme cartésienne de z' lorsque $z = 2+i$.
   b) Déterminer la forme cartésienne de z lorsque $z' = 1-i$.
   c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que z' soit imaginaire pur.
2. a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ on a : $(z'+i).(z-2i) = 2$ et que $BM'.AM = 2$.
   b) En déduire que si M varie sur le cercle (C) de centre A et de rayon 1 alors M' varie sur un cercle (C') dont on précisera le centre et le rayon.
   c) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points $M(z)$ tel que $|z'| = 1$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = a+i$ où $a \in \mathbb{R}$ on désigne par θ un argument de z .
   Montrer que $z' = \dfrac{z}{i\overline{z}}$. En déduire un argument de z' en fonction de θ .
4. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = (z-\sqrt{2})^2 + 2$.
   a) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.
   On notera z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) avec $Im(z_1) < 0$.
   b) Mettre z_1 sous forme trigonométrique ; en déduire la forme trigonométrique de z_2.
5. Soit C le point d'affixe $z_c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
   a) Montrer le triangle OAC est isocèle et que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \equiv \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$.
   b) Soit I le milieu du segment $[AC]$ et son affixe z_I.
   Donner un argument de z_I ainsi que sa forme cartésienne.
   En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.