# Trigonométrie $3^{\text{ème}}$ Math KMH

## *Exercice 1*

Pour chacune des questions suivantes une et une seule réponse est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre qui correspond à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Pour tout x de IR le réel $\sin(3\pi - x)$ est égale à :

a) $-\cos x$ b) $-\sin x$ c) $\sin x$ d) $\cos x$

2) Pour tout x de IR le réel $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ est égale à :

a) $-\sin x$ b) $\sin x$ c) $\cos x$ d) $-\cos x$

3) Soit x un élément de IR le réel $\sin^2(-2x) + \cos^2(-2x)$ est égale à :

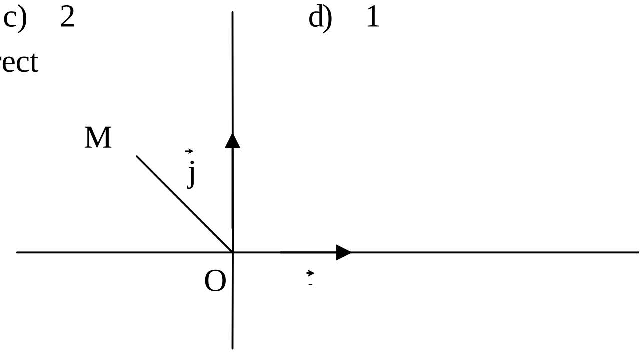
a) -2 b) -1 c) 2 d) 1

4) Dans la figure ci-contre, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct

Les coordonnées polaires de M sont :

a) $\left(\sqrt{2}\ ,\ \frac{\pi}{4}\right)$ b) $\left(-\sqrt{2}\ ,\ \frac{\pi}{4}\right)$

c) $\left(-\sqrt{2}\ ,\ \frac{3\pi}{4}\right)$ d) $\left(\sqrt{2}\ ,\ \frac{3\pi}{4}\right)$




5) Soit a et b deux éléments de IR. Le réel $\cos(b - a)$ est égale à :

a) $\cos b - \cos a$ b) $\sin a \sin b - \cos a \cos b$ c) $\cos a \cos b + \sin a \sin b$

## *Exercice 2*

Soit x un réel. On pose $A = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos(3\pi - x) + \sin\left(x + \frac{13\pi}{2}\right) + \sin(15\pi + x) + \cos\left(x - \frac{19\pi}{2}\right)$

Calculer A en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$



## *Exercice 3*

Sans utiliser une calculatrice calculer les expressions suivantes

$A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$

$B = \sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \sin^2\frac{7\pi}{12} + \sin^2\frac{9\pi}{12} + \sin^2\frac{11\pi}{12}$

$C = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$ $D = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$

$D = \cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{5\pi}{14} + \cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{11\pi}{12}$

## *Exercice 4*

Soit x un réel, montrer les identités suivantes :

$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$ ; $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan\frac{x}{2}$ ; $\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}$

## *Exercice 5*

Sachant que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

1) Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ puis $\sin\frac{\pi}{8}$ 2) Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ puis $\sin\frac{\pi}{12}$

## *Exercice 6*

1) Montrer que : $\forall x \in IR \setminus \left\{k\frac{\pi}{2};\quad k \in Z\right\}$ ; $\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{2}{\sin 2x}$ et que $\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} - 2$

2) En déduire que $\tan^2\frac{\pi}{8} + \tan^2\frac{5\pi}{8} = 6$ [ On remarquera que $\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ]

3) On pose $A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8}$ et $B = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8}$

a) Calculer $A + B$ puis $A - B$

***Exercice 7***

Pour tout réel x on pose :

$$A(x)=\sqrt{3}\cos^2 x+\cos^2\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+\cos^2\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$B(x)=\sqrt{3}\sin^2 x+\sin^2\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$E(x)=\sqrt{3}\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$$

1) Justifier les égalités suivantes :
   a) $A(x)+B(x)=2+\sqrt{3}$
   b) $A(x)-B(x)=E(x)$
2) a) Montrer que pour tout réel x : $E(x)=0$
   b) En déduire les valeurs de $A(x)$ et $B(x)$
3) En calculant $A\left(\frac{\pi}{12}\right)$ de deux manières, trouver la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$

***Exercice 8***

1) Soit la fonction f définie sur $IR\setminus\{k\pi\ ;\quad k\in Z\}$ par $f(x)=\frac{\sin 4x}{4\sin x}$

   a) Montrer que $f\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}$

   b) Montrer que $\forall x\in D_f\ ;\ f(x)=2\cos^3 x-\cos x$

   c) En déduire que le réel $\cos\frac{\pi}{5}$ est une solution de l'équation : $8x^3-4x-1=0$



***Exercice 9***

1) Résoudre dans IR l'équation : $8x^4-8x^2+1=0$
2) Résoudre dans IR puis dans $[0\ ,\ 2\pi]$ l'équation : $\cos 4t=0$
3) Montrer que $\forall t\in IR;\ \cos 4t=8\cos^4 t-8\cos^2 t+1$
4) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{3\pi}{8}$

***Exercice 10***

1) Soit $a\in IR$, vérifier que : $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$
2) On considère dans IR l'équation $(E): 8x^3-6x-1=0$

   a) On posant $x=\cos a$, montrer que l'équation (E) est équivalente à $(E'):\cos 3a=\frac{1}{2}$

   b) Résoudre dans IR l'équation $(E')$ et construire les images des solutions sur le cercle trigonométrique vérifier que ces images sont symétriques deux à deux par rapport à l'axe $(x'x)$

   c) En déduire que l'équation (E) admet dans IR trois solutions qui sont :

$x_1=\cos\frac{\pi}{9}$ ; $x_2=\cos\frac{7\pi}{9}$ et $x_3=\cos\frac{13\pi}{9}$

***Exercice 11***

Soit la fonction $f(x)=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x$

1) Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ , $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

2) Montrer que $\forall x\in IR\quad f(x+\pi)=f(x)$

3) a) Montrer que $\forall x\in IR\quad f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

   b) Montrer que $\forall x\in IR\quad f($

c) Calculer $f(0)$ et en déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$

4) a) Résoudre dans IR l'équation : $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$

b) Résoudre dans IR l'inéquation : $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1\geq 0$

***Exercice 12***

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ on donne les points A et B de coordonnées polaires respectives $\left(2\ ,\ \frac{2\pi}{3}\right)$ et $\left(2\ ,\ \frac{\pi}{6}\right)$

1) a) Placer les points A et B

b) Calculer $\left(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OB}\right)$

c) En déduire que le triangle OAB est isocèle rectangle en O

2) Donner les cordonnées cartésiennes de A et B

3) Soit le point C tel que $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

a) Montrer que OBCA est un carré

b) Montrer que $\left(\vec{i}\ ,\ \overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$

c) Donner les cordonnées cartésiennes de C

4) En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$ , $\cos\frac{\pi}{12}$ , $\cos\frac{7\pi}{12}$ ; $\cos\frac{11\pi}{12}$ ; $\sin\frac{5\pi}{12}$ , $\sin\frac{\pi}{12}$ , $\sin\frac{7\pi}{12}$ , $\sin\frac{11\pi}{12}$ , $\sin\frac{5\pi}{12}$

***Exercice 13***



1) Montrer que $\forall x\in IR$ , $\sqrt{2}\cos x-\sqrt{2}\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

2) Résoudre dans IR l'équation : $\sqrt{2}\cos x-\sqrt{2}\sin x-1=0$

***Exercice 14***

1) Montrer que $\forall x\in IR$ , $\sin 2x-2\cos^2 x=2\cos x(\sin x-\cos x)$

2) Résoudre alors dans l'intervalle $[0\ ,\ 2\pi]$ l'équation : $\sin 2x-2\cos^2 x=0$

***Exercice 15***

1) Résoudre alors dans l'intervalle $[0\ ,\ 2\pi]$ l'inéquation : $2\cos x+\sqrt{3}\geq 0$

2) Donner alors le signe de $2\cos x+\sqrt{3}$ sur $[0\ ,\ 2\pi]$

***Exercice 16***

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ on donne les points A et B de coordonnées polaires respectives $\left(4\ ,\ \frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(4\ ,\ \frac{\pi}{3}\right)$

1) a) Montrer que le triangle OAB est isocèle

b) Placer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les points A et B

c) Montrer que $\left(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{12}[2\pi]$

2) a) Calculer les coordonnées cartésiennes des points A et B

b) En déduire que $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$