Série d'exercices *** 3ème M Rotations	Lycée Secondaire Ali Zouaoui " Hajeb Laayoun "

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R}=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

Définition: On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ et on la note $R_{(\Omega,\theta)}$ l'application du plan dans lui-même qui fixe Ω et qui a tout point M du plan distinct de Ω, associe le point M'

tel que: $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

Remarques :

- Si $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors $R = Id_{\mathscr{P}}$
- Si $\theta \equiv \pi[2\pi]$ alors $R = S_{\Omega}$ (symétrie central de centre Ω)
- Si $\theta \in [0,\pi]$ on dit que R est une rotation directe.
- Si $\theta \in]-\pi,0[$ on dit que R est une rotation indirecte.

Détermination d'une rotation : Une rotation est parfaitement déterminer par la donnée de son angle et celle d'un point et son image.

Réciproque d'une rotation : La rotation $R_{(\Omega,\theta)}$ est une bijection et sa réciproque est $R^{-1}_{(\Omega,\theta)} = R_{(\Omega,-\theta)}$

Propriétés d'une rotation:

Soient A,B,C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$, $C \neq D, R(A)=A', R(B)=B'$ et $R(D)=D'$.(R est la rotation de centre Ω et d'angle θ).

- Toute rotation conserve le produit scalaires et les distances.
- Si on a : $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD} \quad \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{C'D'} \quad ; \quad k \in \mathbb{R}$
- $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \theta[2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}\right)[2\pi]$
- L'image d'une droite par une rotation est une droite.
- L'image d'un segment par une rotation est un segment qui lui est isométrique.
- Une rotation conserve le barycentre de deux points.
- Une rotation conserve le parallélisme et l'orthogonalités de deux droites.
- L'image d'un cercle par une rotation est un cercle qui lui est isométrique et de centre l'image du centre .
- Une rotation conserve le contact.

Définition d'une isométrie : Soit f une application du plan dans lui même , on dit que f est une isométrie du plan si pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $MN = M'N'$.

Théorème : Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$, $AB = CD$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, il existe une unique rotation R tel que $R(A) = C$ et $R(B) = D$, d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right)$ et de centre appartenant aux médiatrices de $[AC]$ et $[BD]$.

Composé de deux rotations : $R_{(\Omega,\theta)} \circ R_{(\Omega,\theta')} = R_{(\Omega,\theta+\theta')}$

Expressions analytiques d'une rotation :

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

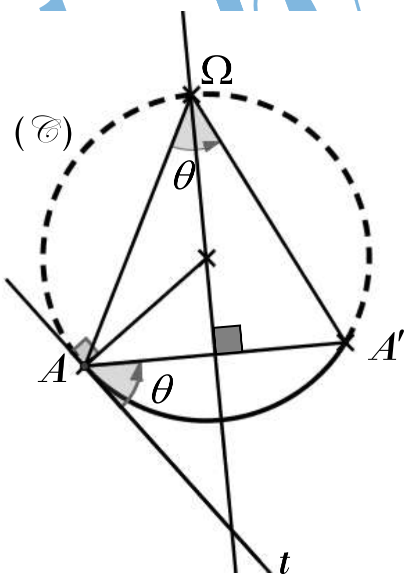
Soit $\Omega(a,b); (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $M(x,y)$ et $M'(x',y') = R_{(\Omega,\theta)}(M)$, les expressions analytiques de $R_{(\Omega,\theta)}$ sont données par $\begin{cases} x' = a + (x-a)\cos(\theta) - (y-b)\sin(\theta) \\ y' = b + (x-a)\sin(\theta) + (y-b)\cos(\theta) \end{cases}$

Construction du centre d'une rotation :

<u>**1er cas**</u> : Soit R la rotation de centre Ω et d'angle θ $(\theta \neq k\pi , k \in \mathbb{Z})$ tel que $R(A) = A'$

$$R(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega A = \Omega A' \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$ donc $\Omega \in méd[AA'] \cap (\mathscr{C})$ avec $(\mathscr{C}) = \widehat{AA'} \setminus \{A, A'\}$

situé dans le demi plan de frontière (AA') ne contenant pas la demi droite $[At)$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{At}, \overrightarrow{AA'}}\right) \equiv \theta[2\pi]$



<u>**2ème cas**</u> :

Soit R une rotation tels que $R(A) = A'$ et $R(B) = B'$ donc l'angle de R est $\theta \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)[2\pi]$

- $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $(\Delta) = méd[AA']$ et $(\Delta') = méd[BB']$

* Si (Δ)et(Δ')sont sécantes alors le centre Ω de la rotation est l'intersection de (Δ)et(Δ').

* Si (Δ)et(Δ')sont confondues alors $\{\Omega\}=(AB)\cap(A'B')$

Exercice N° 01 :

Dans un plan orienté $\mathscr{P}$, on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit R la rotation de centre B et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

1- a) Déterminer l'image de C par R

b) Soit E le symétrique de D par rapport à A. Montrer que E est l'image de D par R.

c) soit F le symétrique de D par rapport à C. Déterminer l'image de F par R.

2- On désigne par O' le milieu de $[BE]$.

Montrer que $OF=O'D$ et que O est l'orthocentre du triangle DFO'.

Exercice N° 02 :

Dans un plan orienté $\mathscr{P}$, on considère un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

Soit R la rotation qui transforme A en B et J en K.

1- Déterminer le centre et une mesure de l'angle de R.

2- Déterminer les images de K et de I par R.

3- On désigne par D le point de $(\mathscr{C})$ diamétralement opposé à A.

Soit R_1 la rotation de centre D et d'angle$\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

a) Montrer que $R_1(B)=C$.

b) Soit A' l'image de A par R_1 .

Montrer que A' est le symétrique de A par rapport à C.

4- Soit M un point du plan P distinct de A.

On pose $M'=R_1^{-1}(M)$ et $M''=R(M)$. Montrer que $\overrightarrow{M''M'}=\overrightarrow{AB}$.

Exercice N° 03 :

Dans un plan orienté $\mathscr{P}$, on considère deux points distincts B et C.

Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ transformant B en C.

1- Déterminer et construire le centre Ω de R.

2- On désigne par $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle ΩBC et par O son centre .

Soit M un point de$(\mathscr{C})$ et M' son image par R.

Montrer que les points M, M' et C sont alignés.

3- Soit C' l'image de C par R.

a) Construire le cercle$(\mathscr{C}')$ image de $(\mathscr{C})$ par R.

b) La droite $(\Omega C')$ recoupe $(\mathscr{C})$ en J.

Montrer que la droite (CJ) passe par le centre O' du cercle $(\mathscr{C}')$.

(on pourra utiliser J' image de J par R)

4- Les droites (BJ) et(ΩC) se coupent en K.

a) Montrer que J est l'image de K par R.

b) Montrer que $BKC'C$ est un losange.

c) Montrer que les points K, J, C et C' sont cocycliques.

Exercice N° 04 :

$ABCD$ est un carré tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On construit le triangle équilatéral BEC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1- Construire l'ensemble : $(\Gamma) = \left\{M \in \mathscr{P} / \left(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]\right\}$

2- Construire le point Ω définie par : $\begin{cases} \Omega A = \Omega C \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$.

3- Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Montrer que $R(E) = D$.

Exercice N° 05 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(2,0), B(4,1), C(1,2)$ et $D(0,4)$

1- Montrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme A en C et B en D.

2- Déterminer θ (l'angle de R).

3- Donner les coordonnées de Ω(centre de R).

Exercice N° 06 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite $(\Delta): x + y - 1 = 0$.

Déterminer une équation cartésienne de (Δ') image de (Δ) par $R_{\left(O, -\frac{\pi}{3}\right)}$.

Exercice N° 07 :

Le plan $\mathscr{P}$ est orienté et muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{cases}$$

1- Montrer que f est une isométrie de $\mathscr{P}$

2- Montrer que f admet un unique point invariant Ω que l'on déterminera.

3- Caractériser f

Exercice N° 08 :

Soient $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r, A est un point fixe de $(\mathscr{C})$, B et C deux points variables de $(\mathscr{C}) \setminus \{A\}$ tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soit $M = S_{(AC)}(B)$. Montrer que lorsque les points B et C varient le point M décrit un cercle que l'on précisera.

Exercice N° 09 :

Le plan $\mathscr{P}$ est orienté et muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- Soit $M(x, y) \in \mathscr{P}$ et $M'(x', y') \in \mathscr{P}$ tel que $M' = R_{(\Omega, \alpha)}(M)$ avec $\Omega(a,b)$; $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

On pose $l = \Omega M$ et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M}\right) \equiv \beta[2\pi]$.

a) Montrer que $x - a = l\cos\beta$ et $y - b = l\sin\beta$.

b) Montrer que $x' - a = l\cos(\alpha + \beta)$ et $y' - b = l\sin(\alpha + \beta)$.

c) En déduire que : $M' = R_{(\Omega, \alpha)}(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = a + (x-a)\cos\alpha - (y-b)\sin\alpha \\ y' = b + (x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}$

2- On pose $R_n = R_{\left(O, \frac{\pi}{2^n}\right)}$; $n \in \mathbb{N}$

Soit $M_0(a_0, b_0)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n(a_n, b_n) = R_n\left(M_{n-1}(a_{n-1}, b_{n-1})\right)$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $M_n = R_{\left(O, \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\pi\right)}(M_0)$.

b) En déduire a_n et b_n en fonction de n, a_0 et b_0.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.