Série d'exercices * 3ème M** **PRODUIT SCALAIRE**	**Lycée Secondaire Ali Zouaoui** **" Hajeb Laayoun "**

Définition :

Soit O un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs . On désigne par A et B les points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}\,.\,\vec{v}$, le réel ainsi défini :

* $\vec{u}\,.\,\vec{v}=OA.OB.\cos\widehat{AOB}$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls .

* si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\,.\,\vec{v}=0$

Conséquence :

pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$ et on l'appelle carré scalaire de $\vec{u}$.

Propriétés :

pour tous vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a :

$\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$	$\vec{u}.(\alpha\vec{v})=\alpha.(\vec{u}.\vec{v})\,;\alpha\in\mathbb{R}$
$(\alpha\vec{u}).\vec{v}=\alpha.(\vec{u}.\vec{v})$	$\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
$(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v})=\alpha\beta(\vec{u}.\vec{v})\ ;\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$	
$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}$	$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}$

Vecteurs orthogonaux :

Définition : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit orthogonaux (on note $\vec{u}\perp\vec{v}$)si leurs produit scalaire est nul.

Conséquence : deux droites sont perpendiculaires , si et seulement si le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.

Produit scalaire et projection orthogonale :

Propriété : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et O ,A et B des points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$; Si H est le projeté orthogonal de B sur (OA) ,alors

$$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}=\begin{cases} OA.OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont colinéaires et de même sens.} \\ -OA.OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont colinéaires et de sens contraire.} \end{cases}$$

Vecteurs colinéaires :

Propriété : pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

* $|\vec{u}.\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz) .

* $|\vec{u}.\vec{v}|=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$, si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

* $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ (Inégalité de Minkowski)

Expression analytiques du produit scalaire dans un repère orthonormé :

- ***Base orthonormée :*** Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non nuls du plan ; On dit que $(\vec{i}\ ,\ \vec{j})$ est une base orthonormée du plan si et seulement si : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i} \perp \vec{j}$.
- ***Théorème :*** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan . Dans une base orthonormée , si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y'$
- ***Conséquence :*** Dans une base orthonormée , $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors on a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x.x' + y.y' = 0.$$

Distance d'un point à une droite :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j}),(\Delta): ax + by + c = 0\ ;\ (a,b) \neq (0,0)$.

La distance du point $A(x_A, y_A)$ à la droite (Δ) est $\boxed{d(A,\Delta) = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$

Aire d'un triangle :

Soit ABC un triangle , on pose $BC = a$; AC=b ; AB=c. S désigne l'aire du triangle ABC , on a :

$$\boxed{S = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}}.$$

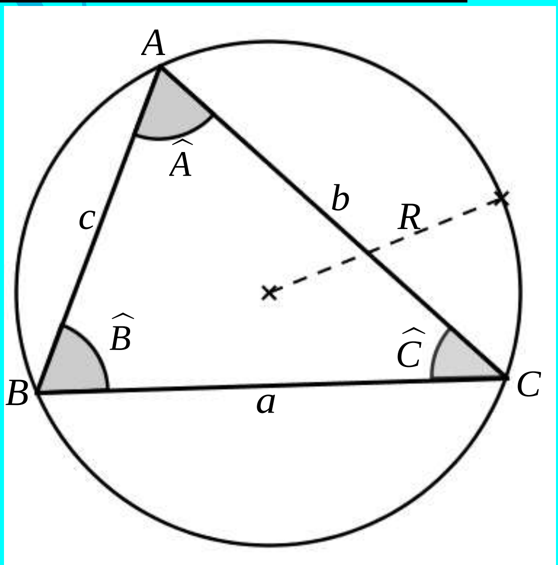
Loi du sinus :

- Soit ABC un triangle , , on pose $BC = a$; AC=b ; AB=c, on a :

$$\boxed{\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}}$$

- S désigne l'aire du triangle ABC et R désigne le rayon de son cercle circonscrit , on :

$$\boxed{\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}}$$



Exercice N° 01 :

Soit ABC un triangle isocèle en A. On note I le milieu de $[BC]$ et H le projeté orthogonal de I sur (AC).

1- Montrer que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CH}$

2- a) Calculer $\overrightarrow{AH}\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)$

b) En déduire que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC}$

3- a) A l'aide des résultats précédents , montrer que $\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AH}\right).\overrightarrow{BH}=0$

b) En déduire que $(AJ)\perp(BH)$ avec $J=I*H$

Exercice N° 02 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, soient $A\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$; $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

et $C\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1- a) Calculer AB ; AC et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b) En déduire $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ et $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$

2- Quelle est la nature du triangle ABC .

Exercice N° 03 :

Soient A et B deux points du plan $\mathscr{P}$ tel que $AB=5$.

Déterminer les ensembles suivants :

a) $\Gamma_1=\left\{M\in\mathscr{P}\ /\ MA^2-MB^2=-5\right\}$

b) $\Gamma_2=\left\{M\in\mathscr{P}\ /\ MA^2+MB^2=-4\right\}$

c) $\Gamma_3=\left\{M\in\mathscr{P}\ /\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-\frac{9}{4}\right\}$

d) $\Gamma_4=\left\{M\in\mathscr{P}\ /\ MA=3MB\right\}$

Exercice N° 04 :

Soient A , B et C trois points du plan tels que $AB=5$; $AC=8$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=20$

1- Quelle est la valeur de $\widehat{BAC}$?

2- Calculer BC et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

3-a) Soit $I=B*C$, montrer que pour tout point M du plan , on a :

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=MI^2-\frac{BC^2}{4}$$

b) En déduire l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M du plan tel que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=20$

Exercice N° 05 :

Soient $ABCD$ un carré de coté a, $I = A * D$, $J = C * D$ et α une mesure en degré de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ}}\right)$.

1- a) Montrer que $BI = BJ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

b) En déduire que $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = \frac{5}{4}a^2\cos(\alpha)$

2- a) Montrer que $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

b) Déterminer deux réels n et m tel que $\overrightarrow{BJ} = n\,\overrightarrow{AB} + m\,\overrightarrow{AD}$

c) En déduire que $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = a^2$

3- Déduire de 1- et 2- une valeur approchée de α à un degré prés.

Exercice N° 06 :

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon R .On place sur $(\mathscr{C})$ quatre points A , A', B et B' tel que $(AA') \perp (BB')$.Soient $\{I\} = (AA') \cap (BB')$ et $A'' = S_O(A)$

1- Faire une figure

2- a) Montrer que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA''} = IO^2 - R^2$

b) En déduire $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'}$ et $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IB'}$

3- a) Calculer $\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right)\overrightarrow{A'B'}$

b) En déduire que la médiane issue de I du triangle IAB est aussi une hauteur du triangle $IA'B'$