Définition : *Soit* O *un point du plan et* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs. On désigne par* A *et* B *les points tels que* $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ *et* $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *et on note* $\vec{u}.\vec{v}$ *, le réel ainsi défini :*

* $\vec{u}.\vec{v}=OA.OB.\cos\widehat{AOB}$ *, si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont non nuls.*

* $\vec{u}.\vec{v}=0$ *, si* $\vec{u}$ *ou* $\vec{v}$ *est nul.*

Conséquence : *pour tout vecteur* $\vec{u}$, $\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$ *et on l'appelle carré scalaire de* $\vec{u}$.

Propriétés : *pour tous vecteurs* $\vec{u},\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *on a :*

* $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

* $(\alpha\vec{u}).\vec{v}=\alpha.(\vec{u}.\vec{v})$

* $\vec{u}.(\alpha\vec{v})=\alpha.(\vec{u}.\vec{v})$

* $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v})=\alpha\beta(\vec{u}.\vec{v})$

* $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

* $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}$

* $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}$

Vecteurs orthogonaux :

Définition : *deux vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont dit orthogonaux si leurs produit scalaire est nul et on note* $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Conséquence : *deux droites sont perpendiculaires, si et seulement si le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.*

Produit scalaire et projection orthogonale :

Propriété : *Soit* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs non nuls et* O, A *et* B *des points tels que* $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ *et* $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ *; Si* H *est le projeté orthogonal de* B *sur* (OA) *, alors*

$$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}=\begin{cases} OA.OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont colinéaires et de meme sens.}\\ -OA.OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont colinéaires et de sens contraire.}\end{cases}$$

Vecteurs colinéaires :

Propriété : *pour tout vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *on a :*

* $|\vec{u}.\vec{v}|\le\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

* $|\vec{u}.\vec{v}|=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$, si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Expression analytiques du produit scalaire dans un repère orthonormé :

➢ **Base orthonormée** : *Soient* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *deux vecteurs non nuls du plan ; On dit que* $(\vec{i},\vec{j})$ *est une base orthonormée du plan si et seulement si* $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$ et $\vec{i}\perp\vec{j}$.

➢ **Théorème** : *Soient* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs du plan. Dans une base orthonormée, si*

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \text{ alors } \vec{u}.\vec{v}=x.x'+y.y'$$

➢ **Conséquence** : *Dans une base orthonormée,* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *alors on a :*

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad \vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow x.x'+y.y'=0.$$

Distance d'un point à une droite *:*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right),(\Delta): ax+by+c=0$; $(a,b)\neq(0,0)$ *. La distance du point* $A\left(x_A,y_A\right)$ *à la droite* (Δ) *est* $\boxed{d(A,\Delta)=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

Aire d'un triangle *:*

Soit ABC un triangle, on pose $BC=a$; AC=b ; AB=c. S *désigne l'aire du triangle ABC , on a :*

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}}.$$

Loi du sinus *:*

- *Soit ABC un triangle , , on pose* $BC=a$; AC=b ; AB=c, *on a :*

$$\boxed{\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}}$$

- S *désigne l'aire du triangle ABC et* R *désigne le rayon de son cercle circonscrit , on :*

$$\boxed{\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}=2R=\frac{abc}{2S}}$$

☆☆☆☆☆

Exercice N° 01 :

Dire si les affirmations suivantes est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

1- *Si* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *sont colinéaires alors* $\vec{u}\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

2- *Si* $\vec{u}.\vec{v}=0$ *alors* $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$

3- *Si* $\vec{u}\vec{v}=\vec{u}\vec{w}$ *alors* $\vec{v}=\vec{w}$

Exercice N° 02 :

Le plan $\mathcal{P}$ *est muni d'un repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, *soit* $A(-2,1)$; $B\left(\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right)$; $C(3,2)$

Calculer de deux façons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ *et en déduire une valeur approchée en degrés de l'angle* $B\widehat{A}C$.

Exercice N° 03 :

1- *Déterminer les réels* α *pour que les vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *soient orthogonaux :*

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha+2\\1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha\\1-\alpha\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\alpha-2\\\alpha+1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha\\2\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sin(\alpha)\\\cos(\alpha)\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}-\sin(\alpha)\\\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\end{pmatrix}$

2- *Soient* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *deux vecteurs du plan tel que* $\|\vec{u}\|=2$; $\|\vec{v}\|=4$ *et* $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

Déterminer le réel β *tel que :*

a) $\vec{u}\left(\vec{u}-2\beta\vec{v}\right)=5$

b) $(\vec{u}+\beta\vec{v})(\vec{v}+\beta\vec{u})=0$

Exercice N° 04 :

Soit A et B deux points du plan tel que $AB=4$

1- Placer sur la droite (AB) le point H tel que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BH}=3$

2- En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}=3$

3- Déterminer l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

a) $MA^2-MB^2=5$

b) $MA^2+MB^2=2$

c) $2MA^2-MB^2=-1$

Exercice N° 05 :

Soit I le milieu d'un segment $[AC]$, J celui d'un segment $[BD]$.

1- Montrer que $AB^2+AD^2+CD^2+CB^2=AC^2+BD^2+4IJ^2$

2- Enoncer le résultat géométrique qu'on en déduit en examinons le cas $I=J$.

Exercice N° 06 :

Soit ABC un triangle équilatéral de coté a

1- Déterminer l'ensemble Δ_1 des points M du plan tel que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\dfrac{a^2}{2}$

2- Déterminer l'ensemble Δ_2 des points M du plan tel que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}=\dfrac{a^2}{2}$

3- Soit $G=\Delta_1\cap\Delta_2$; Qu'est ce qu'il représente le point G pour le triangle ABC ?

Exercice N° 07 :

1- Démontrer en utilisant une (ou des) formule(s) trigonométrique(s) adaptée(s) que :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$$

2- On considère un triangle ABC tel que $BC=4$; $\widehat{B}=\dfrac{\pi}{4}$ et $\widehat{C}=\dfrac{\pi}{3}$.

Montrer que $AB=\dfrac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ et $AC=\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

Exercice N° 08:

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm , dans ce repère on donne les points $A(2,2)$; $B(-3,-1)$ et $C(6,-4)$, ainsi que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. On appelle (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, et (Δ') la droite passant par B et de vecteur normal $\vec{v}$.

1- a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$.

b) Montrer que le point C appartient à la droite (Δ).

c) Montrer que le point C appartient à la droite (Δ').

2- On note $\alpha=A\widehat{C}B$.

a) Calculer $\cos(\alpha)$

b) En déduire une valeur approchée de α à 10^{-1} prés (en degrés).

3- On note H le projeté orthogonal de A sur (BC).

a) Calculer CH puis AH .

b) En déduire l'aire du triangle ABC .

Exercice N° 09:

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1- *Démontrer que les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ sont $\vec{u}.\vec{i}$ et $\vec{u}.\vec{j}$.*

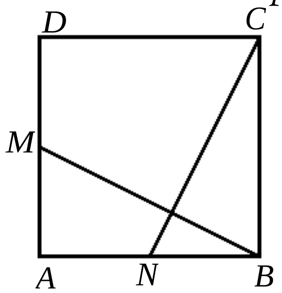
2- *Soit $\vec{e}_1=\frac{4}{5}\vec{i}+\frac{3}{5}\vec{j}$; $\vec{e}_2=-\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}$ et $\vec{u}=-2\vec{i}+3\vec{j}$*

a) *Vérifier que $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ est une base orthonormée du plan .*

b) *Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$.*

c) *Soit $A(-1,2)$ et $\Omega(2,3)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Trouver les coordonnées de A dans le repère $\left(\Omega,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$.*

Exercice N° 10:



Dans la figure ci-contre , ABCD est un carré de coté 1 ; $M=A*D$ et $N=A*B$ .En utilisant un repère orthonormé convenablement choisi , démontrer que $(BM)\perp(CN)$

Exercice N° 11:

On considère un quadrilatère convexe ABCD et on appelle O le point d'intersection de ses diagonales .

démontrer que son aire est égale à : $\frac{1}{2}\times AC\times BD\times\sin A\widehat{O}B$

Exercice N° 12:

On considère un triangle quelconque ABC et on pose $BC=a$; $AC=b$ et $AB=c$; on note $p=\frac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre. Le but de cet exercice est d'exprimer l'aire S du triangle ABC en fonction de a , b et c .

1- *Prouver que* $\cos\widehat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

2- *En déduire que* $\sin^2\widehat{A}=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}$

3- *Montrer que* $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Exercice N° 13:

D'un point Ω intérieur à un cercle (ξ) de rayon R , on mène deux droites perpendiculaires qui rencontrent le cercle (ξ) en A et A' d'une part et en B et B' d'autre part. On note I le milieu du segment $[A'B']$
Il s'agit de montrer que la médiane issue de Ω dans le triangle $\Omega A'B'$ est hauteur du triangle ΩAB
1- Faire une figure.
2- a) Démontrer $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega A'}=\overrightarrow{\Omega B}.\overrightarrow{\Omega B'}$
b) Conclure