

Série d'exercices
Nombre dérivé

Hichem Khazri
3^eM

LE NOMBRE DERIVE

Exercice n°1

Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & \text{si } x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 - 4} + x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- 1) Montrer que f est continue en 2
- 2) Etudier la dérivabilité de f en 2

Exercice n°2

Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x} + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x^2 - 5x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{2x - 5}{x - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- 1- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2- a) Montrer que f est continue en 0 et en 2
b) Préciser le domaine de continuité de f
- 3- a) Montrer que f est dérivable en 2 et donner une équation cartésienne à Cf au point d'abscisse 2
b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement
- 4- Calculer f'(x) pour tout $x \in \mathbb{R}^*$
- 5- pour $x \in]0, 2[$
 - a) Déterminer les points de Cf où la tangente à Cf est //à D : $y = 2x$
 - b) Déterminer les points de Cf où la tangente à Cf passe par le point A(-2,1)

Exercice n°3

Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} - x - 1 & \text{si } x \geq 2 \\ \frac{x^2 + mx + 2}{x - 2} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

- 1- Déterminer le domaine de définition de f
- 2- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 3- Mq que f est dérivable sur $] -\infty, 2[$ et que $\forall x \in] -\infty, 2[\quad f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 2m - 2}{(x - 2)^2}$
- 4- a) Déterminer m pour que la tge T au pt d'abscisse 1 soit $\perp \Delta : x - y + 3 = 0$
b) Donner une équation de T pour la valeur de m trouvée
c) Discuter suivant m $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
d) En déduire m pour que f soit continue en 2
- 5- On prend $m = -3$

Etudier la dérivabilité de f en 2 et interpréter graphiquement le résultat

- 6- a) Montrer que f est dérivable sur $]2, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 6x}} - 1$

Exercice n°4

M étant un paramètre réel, on considère la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x} - 3 & \text{si } x < 0 \\ \frac{(m+1)x^3 - 3x + m^2}{x-1} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2 - x + 1} + x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan

- 1°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$
- 2°) a) Etudier suivant les valeurs de m, la limite de f à gauche en 1
b) En déduire l'ensemble des réels m pour lesquels f est continue en 1
- 3°) a) Montrer que pour tout réel m f n'est pas dérivable en 1
b) Dans le cas où m=1 ; interpréter graphiquement les résultats obtenus au a)
- 4°) Soit C1 la courbe de la restriction de f à $]-\infty, 0[$ selon le repère (O, \vec{i}, \vec{j})
 - a) Soit $x_0 \in]-\infty, 0[$, montrer que f est dérivable en x_0
 - b) déterminer les points de C1 où la tangente est perpendiculaire à la droite $D : 6x - y + 1 = 0$

Exercice n°5

On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 3x| + mx^2 - 2 & \text{si } x < -2 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ (x-2)\sqrt{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ f définie sur IR par :

On désigne par © sa courbe représentative selon un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan

- 1) a) Discuter selon m $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
b) Etudier la continuité de f en 2
c) Déterminer le réel m pour que f soit continue en -2
- Dans toute la suite on prend $m=0$
- 2) a) Etudier la dérivabilité de f en -3. Interpréter graphiquement les résultats
b) Etudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter graphiquement les résultats
 - 3) a) Montrer que $\forall x_0 \in]-\infty, -3[$ f est dérivable en x_0
b) Existe-il un point de C d'abscisse $x_0 \in]-\infty, -3[$ où la courbe admet une tangente parallèle à la droite $D : y = -5x + 1$
c) Existe-il un point de C d'abscisse $x_0 \in]-\infty, -3[$ où la tangente passe par $A(-2, 8)$
d) Donner une équation de la tangente à C au point B d'abscisse -4

Exercice n°6

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 2x^2 - 5x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) = \frac{2x-5}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- 1- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2- a) Montrer que f est continue en 0 et en 2
b) Préciser le domaine de continuité de f

- 3- a) Montrer que f est dérivable en 2 et donner une équation cartésienne à C_f au point d'abscisse 2
 b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement
- 4- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$
- 5- pour $x \in]0,2[$
 a) Déterminer les points de C_f où la tangente à C_f est // à $D : y=2x$
 b) Déterminer les points de C_f où la tangente à C_f passe par le point $A(-2,1)$

Exercice n°7

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 2x - 7}{x + 2} & \text{si } x \leq -1 \text{ et } x \neq -2 \\ f(x) = x^3 + mx^2 + mx - 3 & \text{si } -1 < x < 0 \quad (m \in \mathbb{R}) \\ f(x) = x\sqrt{x} - 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout réel m , f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- 2) Déterminer m pour que f soit dérivable en 0.
- 3) Etudier suivant m , la dérivabilité de f en -1.
- 4) Préciser les intervalles où f est dérivable et déterminer $f'(x)$.
- 5) Déterminer le point de C_f où la tangente est parallèle à la droite $\Delta : 3x - y + 2 = 0$.
- 6) Dans cette question $m \in]-1;0[$.
 a) Ecrire une équation de la tangente Δ_m à C_f au point d'abscisse m .