LYCEE NASRALLAH « $3^{éme}$ Sc » PROF : BenTaiebLotfi	24/05/2016 **DEVOIR DE SYNTHESE N°2** **3Heures** **MATHEMATIQUES**

Le sujet comporte quatre exercices répartis en deux pages

EXERCICE 1 (5 points)

On considère la suite U_n définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{2}{1+U_n} \end{cases}$

1/a. Calculer U_1 et U_2.

b .En déduire que n'est ni arithmétique ni géométrique

c. Montrer par récurrence que pour tout n ∈ IN, $1 \leq U_n \leq 3$.

d. Montrer que la suite U_n est décroissante. Que peut-on déduire ?

2/On considère la suite V_n définie sur IN par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$

Montrer que V_n est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$

3/a. Exprimer V_n puis U_n à l'aide de n.

b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

4/ Soit $S_n = V_0 + V_1 + \dots\dots\dots + V_{n-1}$

Montrer que $S_n = \frac{8}{15}[1 - (-\frac{1}{2})^n]$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE 2 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite D passant par A (1,-1,2) et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

1) Donner une représentation paramétrique de la droite D.

2/ Soit Δ la droite définie par : $\begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases}$; $\alpha \in$ IR

Montrer que D et Δ se coupent au point I(3,1,-2). z

3/ Soit P le plan qui contient D et Δ. Déterminer une équation cartésienne de P.

4/ Soit Q le plan dont une équation cartésienne est : $7x - y + 3z - 1 = 0$

Montrer que P et Q sont parallèles.

5/ Soit H le projeté orthogonal de I sur Q.

Déterminer les coordonnées de H puis déduire la distance de I à Q.

EXERCICE 3 (5 points)

Une urne contient **dix** jetons repartis comme suit : $\begin{cases} \textbf{\textit{quatre}} \textit{ jetons blancs numérotés} : 0, 1, 2, -1 \\ \textbf{\textit{trois}} \textit{ jetons rouges numérotés} : -1, 1, 0 \\ \textbf{\textit{trois}} \textit{ jetons noirs numérotés} : -1, -1, 1 \end{cases}$

1/ On tire simultanément trois jetons de l'urne.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A « les jetons tirés sont de même couleur »
B « la somme des numéros portés par les jetons tirés est nulle »
C « obtenir un seul jeton rouge et un seul portant le numéro 1 »
2/ On tire successivement et avec remise quatre jetons de l'urne.
Calculer la probabilité des événements suivants :
D « les jetons tirés portent le même numéro »
E « le produit des numéros portés par les quatre jetons est égale à 2 »
G « obtenir au moins un jeton blanc »
3/ On tire maintenant tous les jetons un à un jusqu'à ce que l'urne soit vide.
Calculer la probabilité de l'événement suivant :
F « le premier jeton tiré est rouge, le deuxième porte le numéro 2 »

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b. Vérifier que f est de période π.

c. Etudier la parité de f. Interpréter le résultat graphiquement.

d. Soit n un entier naturel. Montrer que les points $A_n(n\frac{\pi}{2}, 0)$ sont des points de symétrique pour C_f.

2/a. Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to \pi^-} f(x)$ et interpréter les résultats graphiquement.

b. Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variation de f sur $]0, \pi[$.

d. Tracer la courbe C_f de f sur un intervalle de longueur 2π.

3/a. Soit $g(x) = f(x)$ pour tout réel x de$]0, \pi[$.

Tracer la courbe C' symétrique de C_g par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

b. On désigne par h la fonction correspond à la courbe C'

Déterminer graphiquement $\lim_{x \to -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x)$