Lycée Majida Boulila Sfax | **Devoir contrôle n°1** | **Mr Jarraya Maher**

Le 7/11/2013 Durée 2h | **Bac Science 1**

Exercice n°1(2pts)

I°) Donner la réponse exacte :

1)le nombre complexes Z définie par $Z=\dfrac{2013-i}{2013+i}$ a pour module :

a) $\dfrac{2013-1}{2013+1}$ b) 1 c) $\sqrt{\dfrac{2013^2-1}{2013^2+1}}$

2) Soientz et z' sont deux nombres complexes non nuls tels que $|z+z'|=|z|+|z'|$ alors

a) $\mathrm{Re}\left(z'\overline{z}\right)=|z'z|$; b) $\arg\overline{z}\equiv\arg(z')\ [2\pi]$; c) $\overline{z}\ z'$ est imaginaire pur

II°) Pour chaque affirmation proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse

a) Soient les fonctions f et g définies par $f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-1$ et $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; Alors on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x)=\dfrac{1}{2}$.

b) Le nombre complexe $a=\left(\sqrt{3}+i\right)^{2013}$ est imaginaire pur

Exercice n°2(4pts)

Soit la suite U définie sur IN par $\begin{cases} U_0=\frac{1}{2} \\ U_{n+1}=\sqrt{2U_n+3} \text{ pour tout } n\in \text{IN} \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que pour tout n$\in IN$ on a $\frac{1}{2}\leq U_n\leq 3$.
2. a. Montrer que la suite U est croissante.
   b.En déduire que U est convergente et déterminer sa limite.
3. a. Montrer que pour tout n$\in IN$ on a $3-U_{n+1}\leq\frac{2}{3}(3-U_n)$
   b .En déduire pour tout n$\in IN$ on a $3-U_n\leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$.Retrouver la limite de U.

Exercice n°3(5pts)

Soit la fonction f définie sur IR^* par $\begin{cases} f(x)=x\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) & si\quad x\in\,]-\infty,1]\setminus\{0\} \\ f(x)=\sqrt{x^2+8}-x-1 & si\quad x\in\,]1,+\infty[\end{cases}$

1. a. Vérifier que pour tout $x\in\,]-\infty,1]\setminus\{0\}$ on a $|f(x)|\leq|x|$
   b.En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0.
2. Montrer que f est continue en 1
3. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ f(x)$
   b. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{\pi}{2}$
4. a. Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet au moins une solution$\alpha\epsilon\left[\frac{1}{2},1\right]$.
   b. Vérifier quecos $\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)=-\frac{\sqrt{1-4\alpha^2}}{2\alpha}$.
5. Soit la fonction g définie sur $]1,+\infty[$par $g(x)=f(\frac{1}{1-x})$
   a. Montrer que g est continue sur $]1,+\infty[$
   b. Déterminer limite de g à droite en 1

Exercice n°4(4,5pts)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A et B d'affixes respectives 1 et – i. On considère la fonction *f* qui à tout point M distinct de B , d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1-z}{1-iz}$.

1°/ Déterminer l'ensemble E_1 des points M pour lequel z' soit réels.

2°/ Déterminer l'ensemble E_2 des points M pour lequel $|z'| = 1$.

3°/ a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$, on a : $z' + i = \frac{-1+i}{z+i}$.

b) En déduire que $BM \cdot BM' = \sqrt{2}$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

c) Montrer que si M appartient au cercle C de centre B et de rayon 1 alors le point M' appartient à un cercle C' que l'on déterminera .

d) Montrer que si M appartient à la droite D d'équation $y = x - 1$ alors le point M' appartient à une droite D' que l'on déterminera .

Exercice n°5(4,5pts)

1. Soit l'équation (E) $z^2 + z + 1 = 0$; on pose $\boldsymbol{j} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   a. Vérifier que **j** est une solution de (E).
   b. En déduire l'autre solution.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct$(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit dans P les points M_1, M_2, M_3 d'affixes respectives les complexes z_1, z_2, z_3.
   a. Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral si et seulement si $z_1 + jz_2 + j^2 z_3 = 0$ ou ou $z_1 + j^2 z_2 + j z_3 = 0$.
   b. Soient A,B et C les points d'affixes 1, $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{j}^2$.Montrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral.
3. A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \boldsymbol{j}z + 1 + 2\mathbf{j}$
   a. Montrer que si M appartient au cercle de centre B et de rayon $\sqrt{3}$ alors M' appartient au même cercle.
   b. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{M'B}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$
   c. Construire le point A' d'affixe 1+3j