Lycée Houmet Souk	Devoir de Synthèse N : 1	3 sciences 2
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 2 Heures	16 - 12 - 2020

EXERCICE N : 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes , une seule des trois réponses proposées est exacte .Sans justification , le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie .

1) soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = |x-2| - |x+2|$.

a) f est paire **b)** f est impaire **c)** f ni paire et ni impaire

2) A et B sont deux points distincts du plan et $\Gamma = \{ M \in P$ tels que : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \perp (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \}$.

L'ensemble Γ est :

a) le cercle de diamètre [AB] **b)** $\varnothing$ **c)** La médiatrice de [AB]

3) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$. Sur l'intervalle $]0\ ; +\infty[$ g est :

a) croissante **b)** décroissante **c)** non monotone

4) On donne $h(x) = \sqrt{x^4 - x^2}$

a) $D_h = [0\ ; +\infty[$ **b)** 0 est le minimum de h sur D_h **c)** $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$

EXERCICE N : 2 (8.75 points)

A) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1-5x}{2x^2+x+1}$.

On désigne par **(Cf)** la courbe représentative de f dans le repère orthonormé **R** $(O , \vec{i} , \vec{j})$.

1) Montrer que f est définie sur IR .

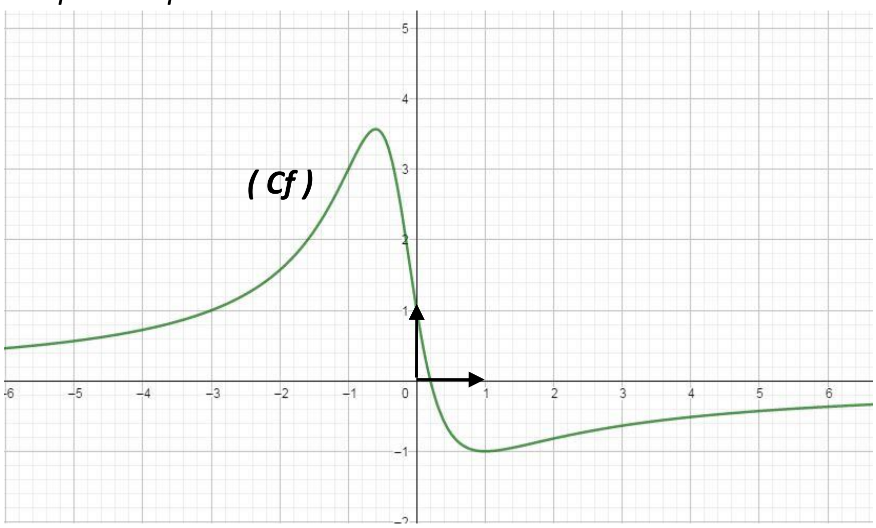
2) Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement les résultats obtenus .

3) Montrer que -1 est le minimum de f sur IR .

4) a) Montrer que pour tout $x \in IR$; $7 f(x) - 25 \leq 0$.

b) Déduire que f admet un maximum sur IR que l'on précisera .

B) on a tracé ci-contre la courbe **(Cf)** .



1) Résoudre graphiquement :

a) $f(x) = 1$

b) $-1 < f(x) \leq 1$

2) Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b+2}{x+4} & si \quad x < -3 \\ f(x) & si \quad -3 \leq x < 1 \\ 2\sqrt{x^2+3} + ax + b & si \quad 1 < x \end{cases}$$

On désigne par **(Cg)** la courbe représentative de g dans le repère **R** .

a) Déterminer $\mathbf{D_g}$ le domaine de définition de g . justifier la réponse .

b) Déterminer les valeurs de **a** et **b** pour que g admet une limite en -3 et une limite en 1 .

C) Pour la suite on prend : $a = -1$ et $b = -4$.

1) *Calculer $\lim\limits_{x \to -4^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -4^-} g(x)$. Interpréter géométriquement les résultats obtenus .*

2) a) *Montrer que la droite $\Delta :\ y = x - 4$ est une asymptote à **(C g)** au voisinage de $+\infty$.*

b) *Donner la position relative de **(Cg)** par rapport à Δ sur $]\,1\ ;+\infty\,[$.*

EXERCICE N : 3 (8.25 points)

A) *Soit ABCD un carré tel que **AB = 4 cm** .*

On pose I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CI]$, K le milieu de $[IB]$ et H le milieu de $[BC]$.

1) *Faite une figure .*

2) *Calculer $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ}$; $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BJ}$ puis déduire que $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{JD} = -2$.*

B) *Soit $\Delta = \{ M \in P$ tels que : $2MC^2 - MA^2 - MB^2 = -16 \}$.*

1) a) *Justifier que pour tout point M du plan on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 8$.*

b) *Montrer que pour tout point M du plan on a : $2MC^2 - MA^2 - MB^2 = 4\,\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{JM} - 8$.*

2) a) *Prouver que : $D \in \Delta$.*

b) *Montrer que Δ est la droite passante par D et perpendiculaire à (IC) .*

3) *Soient $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les cercles de centres respectifs C et I et passants par D .*

*$(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se recoupent en un point E **autre que D** .*

a) *Construire le point E .*

b) *Prouver que $E \in \Delta$.*

C) *Soit **R** $\left(A ; \dfrac{\overrightarrow{AB}}{4} ; \dfrac{\overrightarrow{AD}}{4} \right)$ un repère orthonormé du plan*

1) *Donner une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ dans le repère **R** .*

2) *Donner une équation cartésienne de la droite Δ dans le repère **R** .*

3) *Déterminer les coordonnées du point E dans le repère **R** .*

Correction devoir de synthèse n : 1

EXERCICE N : 1 (3 points)

1) a) $D_f = IR$,donc si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$; $f(-x) = |-x-2| - |-x+2| = |x+2| - |x-2| = -f(x)$ donc f est impaire .(0.75)

2) c) $M \in \Gamma \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \perp (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 0$

$\Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow \Gamma$ est la médiatrice de [AB] . (0.75)

3) a) Soient a et b deux réel de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ tels que $a < b$ alors $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Rightarrow -\frac{1}{a} < -\frac{1}{b}$ et $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

par suite $\sqrt{a} - \frac{1}{a} < \sqrt{b} - \frac{1}{b} \Leftrightarrow g(a) < g(b)$ donc g est croissante sur $]0 ; +\infty[$. (0.75)

4) b) $h(x) = \sqrt{x^4 - x^2}$; $h(0) = 0 \le h(x)\ \forall x \in D_h$ donc 0 est le minimum de h sur D_h . (0.75)

EXERCICE N : 2 (8.75 points)

A) 1) $f(x) = \dfrac{1-5x}{2x^2+x+1}$. $D_f = \{ x \in IR$ tels que : $2x^2+x+1 \neq 0 \}$

on pose : $2x^2+x+1 = 0$; $\Delta = 1-8 = -7 \Rightarrow 2x^2+x+1 > 0\ \forall x \in IR$ donc $D_f = IR$. (0.5)

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-5x}{2x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-5}{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x}{2x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5}{2x} = 0$ (0.25) + (025)

Interprétation : (C f) admet une asymptote horizontale d'équation : $y = 0$ aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$. (0.25)

3) $f(x)+1 = \dfrac{1-5x}{2x^2+x+1} + 1 = \dfrac{1-5x+2x^2+x+1}{2x^2+x+1} = \dfrac{2x^2-4x+2}{2x^2+x+1} = \dfrac{2(x^2-2x+1)}{2x^2+x+1} = \dfrac{2(x-1)^2}{2x^2+x+1} \ge 0$. (0.5)

$\Leftrightarrow -1 \le f(x) \Leftrightarrow f(1) \le f(x)\ \forall x \in D_f \Leftrightarrow 1$ est le minimum de f sur D_f . (0.5)

4) a) $7f(x) - 25 = \dfrac{7-35x}{2x^2+x+1} - 25 = \dfrac{7-35x-50x^2-25x-25}{2x^2+x+1} = \dfrac{-50x^2-60x-18}{2x^2+x+1}$

$= \dfrac{-2(25x^2+30x+9)}{2x^2+x+1} = \dfrac{-2(5x+3)^2}{2x^2+x+1} \le 0 \Leftrightarrow 7f(x) - 25 \le 0\ \forall x \in D_f$. (0.5)

b) $7f(x) - 25 \le 0 \Leftrightarrow f(x) \le \dfrac{25}{7} \Leftrightarrow f(x) \le f\left(-\dfrac{3}{5}\right)\ \forall x \in D_f \Leftrightarrow \dfrac{25}{7}$ est le maximum de f sur D_f . (0.5)

B) 1) a) $f(x) = 1$, $(Cf) \cap (\Delta : y = 1) = \{ A(-3, 1) ; B(0, 1) \} \Rightarrow S_{IR} = \{-3, 0\}$ (0.5)

b) $-1 < f(x) \le 1$, les solutions sont les abscisses des points de **(C f)** situés strictement au dessus de la droite d'équation : $y = -1$ et au dessous de la droite d'équation : $y = 1$ donc $S_{IR} =]-\infty ; -3] \cup [0 ; +\infty[\setminus \{1\}$. (0.5)

2) * $x \mapsto \dfrac{ax+b+2}{x+4}$ est définie sur $IR \setminus \{-4\}$ en particulier sur $]-\infty ; -3[\setminus \{-4\}$.

* f est définie sur IR en particulier sur $[-3 ; 1[$.

* $x \mapsto 2\sqrt{x^2+3} + ax + b$ est définie sur IR en particulier sur $]1 ; +\infty[$

Conclusion : $D_g = IR \setminus \{-4, 1\}$ (1.25)

3) $\lim\limits_{x\to-3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{ax+b+2}{x+4} = -3a+b+2$; $\lim\limits_{x\to-3^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = 1$

g admet une limite en $-3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-3^+} g(x) \Leftrightarrow -3a+b+2 = 1$ (1)

$\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to1^+} 2\sqrt{x^2+3} + ax + b = 4 + a + b$

g admet une limite en $1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1^+} g(x) \Leftrightarrow 4 + a + b = -1$ (2)

(2) - (1) $\Rightarrow 4a + 2 = -2 \Leftrightarrow 4a = -4 \Leftrightarrow$ **$a = -1$** , (1) $\Rightarrow 3 + b + 2 = 1 \Leftrightarrow$ **$b = -4$** . (1.25)

C) Pour la suite on prend : $a = -1$ et $b = -4$.

1) $\lim\limits_{x \to -4^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -4^+} \left(-\dfrac{x+2}{x+4}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -4^+} (x+4) = 0^+$. **(0.25)**

$\lim\limits_{x \to -4^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -4^-} \left(-\dfrac{x+2}{x+4}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -4^-} (x+4) = 0^-$. **(0.25)**

Interprétaion : (C g) admet une asymptote verticale d'équation : $x = 0$. **(0.25)**

2) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - (x-4) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\sqrt{x^2+3} - x - 4 - (x-4) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\sqrt{x^2+3} - 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} 2(\sqrt{x^2+3} - x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} 2\left(\dfrac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6}{\sqrt{x^2+3}+x} = 0$

Par suite **(C g)** admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique $\Delta : y = x - 4$. **(0.75)**

b) Pour tout $x \in]1 ; +\infty[$, $g(x) - y = \dfrac{6}{\sqrt{x^2+3}+x} > 0$ donc (C g) est au dessus de Δ sur $]1 ; +\infty[$. **(0.5)**

EXERCICE N : 3 (8.25 points)

A) 1) Figure **(0.5)**

2) * $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BK}$ **[J = I * C et K = I * B ⇒ (JK) ∥ (BC) or (BC) ⊥ (IB) donc K est le projeté ⊥ de J sur (IB)]**

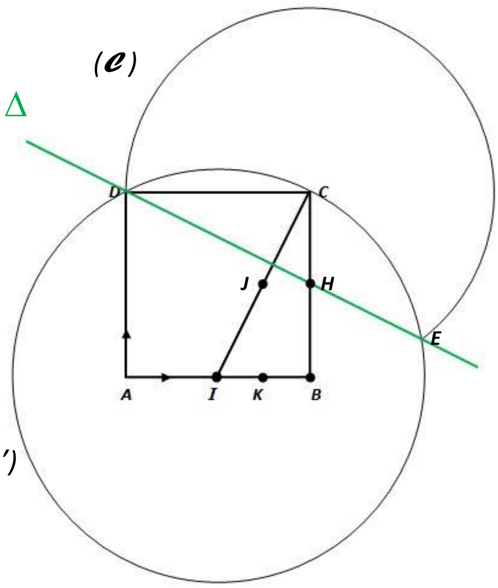
$= BI \cdot BK = 2$ **(0.5)**

* $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH}$ **[J = I * C et H = B * C ⇒ (JH) ∥ (IB) or (IB) ⊥ (BC) donc H est le projeté ⊥ de J sur (BC)]**

$= BC \cdot BH = 4 \cdot 2 = 8$ **(0.5)**

* $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{JD} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}) \cdot (\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BJ} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BD}$

$= 8 - BC^2 - 2 + BI \cdot BA = 8 - 16 - 2 + 8 = -2$ **(0.75)**



B) Soit $\Delta = \{ M \in P$ tels que : $2MC^2 - MA^2 - MB^2 = -16 \}$.

1) a) I est le milieu du [AB] d'après la formule de la médiane

Pour tout $M \in P$, $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2} = 2MI^2 + 8$. **(0.5)**

b) $2MC^2 - MA^2 - MB^2 = 2MC^2 - (MA^2 + MB^2)$

$= 2MC^2 - (2MI^2 + 8) = 2(MC^2 - MI^2) - 8$

$= 2(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MI}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MI}) - 8$

$= 2\overrightarrow{IC}(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JI}) - 8 = 4\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{JM} - 8$. **(0.75)**

2) a) $2DC^2 - DA^2 - DB^2 = 4\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{JD} - 8 = -8 - 8 = -16 \Leftrightarrow D \in \Delta$ **(0.5)**

b) $M \in \Delta \Leftrightarrow 2MC^2 - MA^2 - MB^2 = -16 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{JM} - 8 = -16$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{CI} \cdot (\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DM}) = -8 \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DM} = -2 \Leftrightarrow -2 + \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DM} = -2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DM} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CI} \perp \overrightarrow{DM} \Leftrightarrow \Delta$ est la droite passante par D et perpendiculaire à (IC) . **(0.75)**

3) a) Construction du point E . **(0.5)**

b) $2EC^2 - EA^2 - EB^2 = 2DC^2 - (EA^2 + EB^2) = 32 - (2EI^2 + 8) = 32 - (2DI^2 + 8) = 32 - 2(DA^2 + AI^2) - 8$

$= 24 - 2(16 + 4) = -16 \Leftrightarrow E \in \Delta$ **(0.75)**

C) 1) Le point C (4 , 4) dans le repère R donc $(\mathcal{C}) : (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$. **(0.5)**

2) $I(2,0)$, $(IC) \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IC}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à Δ donc $\Delta : x + 2y + c = 0$ or $D(0,4) \in \Delta$

alors $8 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$ d'où $\Delta : x + 2y - 8 = 0$. **(0.5)**

3) $E(x,y) \in \Delta \cap (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16 & \textbf{(1)} \\ x + 2y - 8 = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow x = 8 - 2y$, on change x dans **(1)** $(4 - 2y)^2 + (y-4)^2 = 16 \Leftrightarrow 5y^2 - 24y + 16 = 0$

$\Delta = 24^2 - 20.16 = 256 = 16^2$ donc $y = 4$ ou $y = \dfrac{4}{5}$.

$y = 4 \Rightarrow x = 0$ donnent le point $D(0,4)$ et $y = \dfrac{4}{5} \Rightarrow x = \dfrac{32}{5}$ donnent le point $\mathbf{E}\left(\dfrac{32}{5} , \dfrac{4}{5}\right)$. **(1.25)**