Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de Synthèse n° 1** Mathématiques	Niveau : 3 ème Sc exp 1
Date : 03 / 12 / 2019	Prof : Meddeb Tarek	Durée : 2 heures

NB : *il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 : (8 pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x^2+2x}+x+1$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer le domaine de définition de f, noté D_f.

2) $a/$ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$b/$ Montrer que, pour tout $x\in D_f$, $f(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+2x}-x-1}$.

$c/$ En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat.

3) Montrer que, pour tout $x>0$, $\dfrac{f(x)}{x}=\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1+\dfrac{1}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

4) $a/$ Montrer que, pour tout $x>0$, $f(x)-2x-2=\dfrac{-1}{f(x)}$.

$b/$ En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ que l'on précisera.

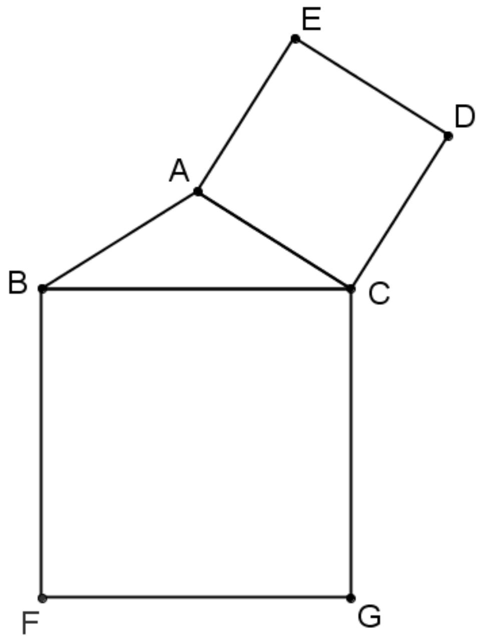
5) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x)=\begin{cases}\dfrac{2\left(1-\sqrt{1-x}\right)}{x} & si\ x<0\\ f(x) & si\ x\geq 0\end{cases}$

Montrer que g est continue sur IR.

Exercice n°2 : (7 pts)

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC isocèle de sommet principale A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\theta[2\pi]$. où θ est un réel.

On construit à l'extérieur du triangle ABC les carrés $ACDE$ et $CBFG$.



1) Exprimer, en fonction de θ, les mesures de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})$ et $(\overrightarrow{GF},\overrightarrow{EA})$.

2) $a/$ Montrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CF}}\right)\equiv\dfrac{5\pi}{4}-\theta[2\pi]$.

$b/$ Montrer que : $2\left(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv-\dfrac{\pi}{2}+2\theta[2\pi]$.

$c/$ En déduire que les droites (BE) et (CF) sont parallèles.

Exercice n°3 : (5 pts)

On donne sur le graphique ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $IR\setminus\{2\}$.

On admet que :v

- La droite Δ est une asymptote de C_f au voisinage de $+\infty$.
- La droite d'équation : $y=-1$ est une asymptote de C_f au voisinage de $-\infty$.
- Les points $O(0,0)$, $B(1,1)$ et $A(3,0)$ sont des points de C_f.

1) Par lecture graphique, déterminer :

   $a/$ Les limites aux bornes du domaine de définition de *f*.

   $b/$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x-2\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)-x-2}$.

2) Soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

   $a/$ Déterminer le domaine de définition de g noté D_g.

   $b/$ On pose pour tout $x\in D_g\setminus\{1\}$, $h(x)=\dfrac{g(x)-1}{f(x)-1}$.

   Montrer que pour tout $x\in D_g\setminus\{1\}$, $h(x)=\dfrac{-g(x)}{\sqrt{f(x)}+1}$.

   $c/$ En déduire que h est prolongeable par continuité en 1 et déterminer ce prolongement.