Lycée Ibn Elhaythem nouvelle matmata 09/05/2022 Prof : Kayel .M	Epreuve : *Mathématiques* *Devoir contrôle N°3*	
	Durée :2 heures	$3^{ème}$*maths*

Exercice N°1

Soit(U_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \beta \quad où \quad \beta \in [-2\,,\ 1[\\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n + 3}{U_n + 6} \end{cases}$

1/a)Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $-2 \leq U_n \leq 1$

b)En déduire que pour tout entier naturel n , (U_n) n'est pas constant

c) Etudier la monotonie de (U_n)

2/Soit Soit(V_n) la suite définie sur IN par : $V_n = 1 + \frac{4}{U_n - 1}$ et on prendra $\beta = -2$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera sa raison q
b) Exprimer V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n

3/ a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $1 - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(1 - U_n)$

b) En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $1 - U_n \leq 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$

c) En déduire que pour tout entier naturel k , on a : $1 - 3\left(\frac{3}{4}\right)^k \leq U_k \leq 1$

4/ Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$

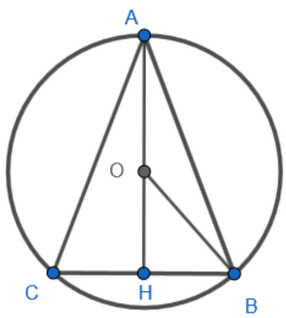
Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $n + 1 - 12\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) \leq S_n \leq n + 1$

Exercice N°2

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A , inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1.on pose H le projeté orthogonal de A sur [BC].

On désigne par x la mesure de l'angle $\widehat{HOB}$.

On suppose que $x \in I =]0, \frac{\pi}{2}[$ .on pose f(x) :**l'aire du triangle ABC**



1/a) Exprimer BC et AH en fonction de x

b)Montrer que pour tout x de I on a : f(x)= (1+cosx)sinx

2/a)Montrer que pour tout x de I on a : f'(x) = (1+cosx)(2cosx-1)

b) Dresser le tableau de variation de f sur I

c) Déterminer x pour la quelle l'aire du triangle est maximale

3/ Construire C_f sur I

4 /On prend x = $\frac{\pi}{3}$ .montrer que ABC est un triangle equilateral

Exercice N°3

Une urne U_1 contient 7 boules indiscernables au toucher, réparties comme suit :
4 blanches numérotées :1, 1, 2, 2 et 3 rouges numérotées :1, 1, 1.

1) On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne.

   a – Quelles est la probabilité de chacun des événements suivants :

   A : « obtenir deux boules de même couleur »

   B : « obtenir deux boules portant le même numéro »

   b – Calculer : $P(A \cap B)$ puis $P(A \cup B)$. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ et $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

2) Une urne U_2 contient 5 boules numérotées : $-1, -1, 0, 1, 1$.
On tire, au hasard, une boule de l'urne U_1 puis une boule de U_2. On désigne par a le numéro inscrit sur la boule tirée de U_1 et par b celui de la boule tirée de U_2.
A chaque couple (a,b) obtenu on associe le réel $x = a^2 + b^2$.
Calculer la probabilité de chacun des événements :
E_1 : « avoir $x = 2$ » ; E_2 : «avoir $x = 4$ » ; E_3 : « avoir $x = 5$ » ; E_4 : « avoir $x \geq 1$ »

Question bonus (2pts)

Montrer que pour tout entier naturel n non nul

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$