LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE **BACCALAURÉAT BLANC** MAI - 2016	Épreuve : MATHÉMATIQUES Durée : 3 heures Coefficient : 3
$4^{ème}$ SCIENCES INFO.	PROF : SALAH HANNACHI

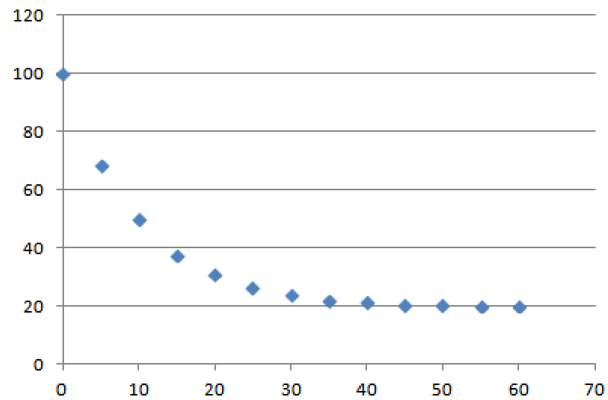
Le sujet comporte quatre exercices répartis en trois pages

EXERCICE 1 : (4 points)

En vue de comprendre le phénomène de refroidissement d'un liquide après son ébullition, on relève, durant une heure et toutes les cinq minutes, la température T de ce liquide.
Le tableau ci-dessous donne les résultats recensés pour une tasse de café servie dans un salon dont la température ambiante est de 20°C.

t en minutes	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
T en °C	100	68.5	50	37.5	31	26.5	24	22	21.5	20.9	20.5	20.3	20.2

Le nuage de points associé à la série statistique (t,T) est représenté ci-contre :
Ce nuage permet d'envisager **un ajustement de type exponentiel.**



On pose $\theta = \ln(T-20)$
Les valeurs de θ, seront arrondies à 10^{-2} près.

1) Recopier sur votre copie et compléter le tableau suivant :

t en minutes	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
θ	4.38	3.88	3.40	2.86	…….	……	1.39	……	0.41	-0.11	……	…….	-1.61

2) a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r (arrondi à 10^{-4} près) de la série statistique (t, θ) .
   b) Un ajustement affine de θ en t par les moindres carrés est il alors possible ? Justifier.
3) Donner une équation cartésienne de la droite de régression D de θ en t.
4) En déduire que l'expression de T en fonction de t est de la forme $T = 20 + \alpha.e^{\beta t}$ où α et β sont deux réels dont on donnera les valeurs arrondis à 0,1 près.
▲ Dans la suite, tout résultat doit être arrondi à l'unité.
5) a) Estimer la température de cette tasse de café après 90 minutes de sa préparation.
   b) Après combien de temps la température de cette tasse atteigne 28°C ? Expliquer.

EXERCICE 2 : (6 points)

Une entreprise fabrique des chemises en très grande série. Une chemise peut présenter deux types de défauts :

⁎ Un défaut de finition avec une probabilité de 0,03.

⁎ Un défaut de couleur avec une probabilité de 0,02.

■ La probabilité qu'une chemise ait les deux défauts à la fois est de 0,01.

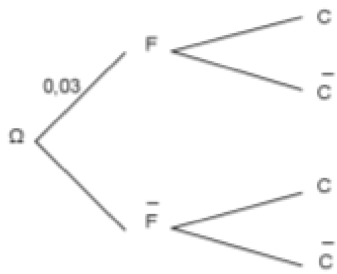
On considère les événements :

F : « La chemise présente un défaut de finition »

C : « La chemise présente un défaut de couleur »

A : « La chemise ne présente aucun défaut »

On peut modéliser ces données par l'arbre de probabilités ci-contre :



I/ 1) a) Donner la valeur de $p(C \cap F)$.

b) En déduire que $p\left(C \cap \overline{F}\right) = 0{,}01$

2) a) On sait que la chemise présente un défaut de finition. Montrer que la probabilité qu'elle ait un défaut de couleur est égale à $\frac{1}{3}$.

b) En déduire la probabilité que la chemise ait seulement un défaut de finition.

3) Montrer que la probabilité que la chemise ait un unique défaut est de 0,03.

4) Montrer que $p(A) = 0{,}96$

5) On considère un lot de 10 chemises emballées de cette entreprise. Un contrôle s'effectue sur l'état de chaque article de ce lot de façon indépendante. Soit X le nombre de chemises dans ce lot n'ayant aucun défaut. Calculer la probabilité (arrondi à 10^{-2} près) que 9 chemises de ce lot ne présentent aucun défaut.

II/ Une chemise (de cette entreprise) sans défaut est vendue à 40 DT. Son prix décroit à 30 DT si elle présente un seul défaut. Elle sera vendue à 20 DT si elle présente les deux défauts. Soit Y la variable aléatoire qui à chaque chemise associe son prix de vente.

1) Déterminer la loi de probabilité de Y.

2) Calculer le prix moyen d'une chemise.

III/ Dans cette entreprise on se sert de 10 machines identiques dans la fabrication des chemises. Chacune de ces machines a une durée de vie T (exprimée en années) qui suit une loi de probabilité exponentielle p de paramètre λ telle que $p(T > 5)=0{,}2$.

1) Montrer que $\lambda = \frac{ln5}{5}$

▲ Dans la suite, toute probabilité demandée doit être arrondi à 10^{-2} près.

2) Quelle est la probabilité qu'une machine n'est plus fonctionnelle après 3 années.

3) Quelle est la probabilité qu'une machine fonctionnait une années et pouvait tomber en panne au cours des deux années suivants.

4) Une machine a fonctionné une années. Calculer la probabilité qu'elle fonctionnait encore 2 années de plus.

EXERCICE 3 : (3 points)

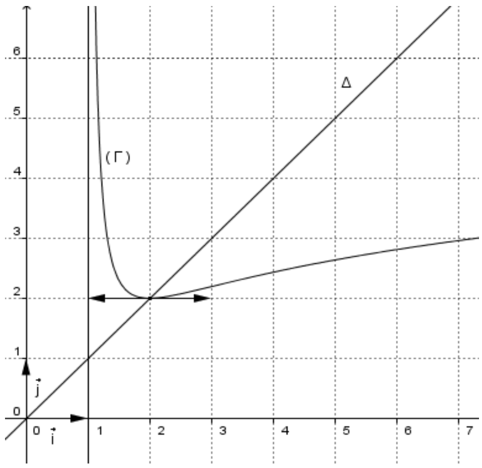
Pour chacune des propositions suivantes, une seule des trois réponses est exacte. Indiquez sur votre copie sans justifier, le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1) L'équation (E) : $21x+7y=25$ admet dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:
   a) une infinité de solutions. **b)** une seule solution. **c)** zéro solutions.

2) Pour tout entier non nul n, PGCD(2n,2n+1) est égal à :
   a) 1 **b)** 2n **c)** 2n+1

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = 1 + 3^{2n}$. Le reste de la division euclidienne de A par 4 est égal à :
   a) 0 **b)** 1 **c)** 2

EXERCICE 4 : (7 points)



A/ Dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$ ci-contre, (Γ) est la courbe de la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x) = \frac{ax}{x-1} + b.\ln(x-1)$ et la droite Δ est d'équation $y = x$.

L'unique tangente horizontale à (Γ) est au point A(2,2).

1) Dresser le tableau de variation de g.
2) En se servant des valeurs graphiques de g(2) et g'(2), montrer que : a=b=1
3) a) Montrer que $\int_2^{e+1} \frac{x}{x-1}dx = e$

   (on peut remarquer que $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$)

   b) Calculer (en unité d'aire) l'aire de la partie du plan limitée par (Γ), Δ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = e+1$

B/ Soit la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x) = x.\ln(x-1)$. On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O', \vec{u}, \vec{v})$.

1) Montrer que pour tout réel x de $]1,+\infty[$ on a : $f'(x) = g(x)$.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.
4) Montrer que le point A(2,0) est un point d'inflexion de (C).
5) Tracer la courbe (C).

C/ Soit la suite (I_n) définie sur IN* par : $I_n = \int_2^e x^n \ln(x-1)\,dx$

1) a) Interpréter géométriquement le terme I_1.

   b) Vérifier que $\frac{x^2}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$ pour tout réel $x \neq 1$

   c) Calculer le terme I_1.

2) a) Montrer que pour tout réel x de [2,e] et pour tout $n \in$ IN* on a : $0 \leq x^n \ln(x-1) \leq x^n$

   b) En déduire que pour tout $n \in$ IN* on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}$

   c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{e^n}$

LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE **CORRIGÉ DU BAC BLANC** 2015/2016	Épreuve : **MATHÉMATIQUES** Durée : 3 heures Coefficient : 3
$4^{\text{ème}}$ **SCIENCES INFORMATIQUE**	PROF : SALAH HANNACHI

EXERCICE 1 : (4 points)

1)

t en minutes	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
θ	4.38	3.88	3.40	2.86	2,4	1,87	1.39	0,69	0.41	-0.11	-0,69	-1,2	-1.61

2) a) $r = \dfrac{\text{Cov}(t,\theta)}{\sigma(t).\sigma(\theta)} \cong 0{,}9996$

b) Oui il est possible de faire un ajustement affine de θ en t, par les moindres carrés. En effet $0{,}75 \leq |r| < 1$.

3) D : $\theta = a.t+b$ où $a = \dfrac{\text{Cov}(t,\theta)}{V(t)} \cong -0{,}1$ et $b = \bar{\theta} - a.\bar{t} \cong 4{,}38$. Donc D : $\theta = -0{,}1.t + 4{,}38$

4) On a : $\theta = \ln(T-20)$ cela équivaut à : $T = 20 + e^{\theta}$

équivaut à : $T = 20 + e^{-0{,}1.t + 4{,}38}$

équivaut à : $T = 20 + e^{4{,}38}.e^{-0{,}1.t}$ D'où : $T = 20 + 79{,}8.e^{-0{,}1.t}$

5) a) Pour t = 90 mn on a : $T = 20 + 79{,}8.e^{-0{,}1\times 90} \cong 20°C$

b) $T = 20 + 79{,}8.e^{-0{,}1.t} = 28$ équivaut à : $e^{-0{,}1.t} = \frac{8}{79{,}8}$

équivaut à : $t = -10\times\ln\left(\frac{8}{79{,}8}\right) \cong 23$ mn

EXERCICE 2 : (6 points)

I/ 1) a) $p(C \cap F) = 0{,}01$

b) $p(C\cap F) + p(C \cap \bar{F}) = p(C)$ équivaut à $p(C \cap \bar{F}) = p(C) - p(C\cap F)$

$= 0{,}02 - 0{,}01 = 0{,}01$

2) a) $p(C/F) = \dfrac{p(C\cap F)}{p(F)} = \dfrac{0{,}01}{0{,}03} = \dfrac{1}{3}$

b) $p(F\cap \bar{C}) = p(\bar{C}/F) \times p(F) = [1 - p(C/F)] \times p(F) = \frac{2}{3} \times 0{,}03 = 0{,}02$

3) $p(F\cap \bar{C}) + p(C \cap \bar{F}) = 0{,}02 + 0{,}01 = 0{,}03$

4) $p(A) = p(\bar{C} \cap \bar{F})$.

$p(\bar{C} \cap \bar{F}) + p(F \cap \bar{C}) = p(\bar{C})$ cela équivaut à $p(\bar{C} \cap \bar{F}) = 1 - p(C) - p(F \cap \bar{C}) = 1 - 0{,}02 - 0{,}02$

D'où $p(A) = 0{,}96$

5) au cours de ce contrôle une même épreuve de Bernoulli (A est le succès ou $\bar{A}$ est l'échec) se répète 10 fois de façon indépendante. Alors X suit une loi binomiale de paramètres (n = 10 , p = p(A)=0,96)

Ainsi : $p(X=9) = C_{10}^{9}.(0{,}96)^9.(1 - 0{,}96) \cong 0{,}28$

II/ 1) L'ensemble des valeurs prises par Y est : Y(Ω)= {20,30,40}

Loi de probabilité de Y :

- p_1 = p(Y=20)= p(C ∩ F) = 0,01
- p_2 = p(Y=30)= p(F∩ $\overline{\text{C}}$)+ p $(\text{C} \cap \overline{\text{F}})$ = 0,03
- p_3 = p(Y=40)= p(A) = 0,96

On peut dresser alors un tableau (tableau de la loi de probabilité de Y)

y_i	20	30	40
p_i	0,01	0,03	0,96

2) Le prix moyen d'une chemise est E(Y)= $\sum_{i=1}^{i=3} p_i . y_i = 20\times 0{,}01 + 30\times 0.03 + 40 \times 0.96$
$= 39^{\text{DT}}.500$

III/ 1) p(T > 5)=0,2 équivaut à $e^{-\lambda.5} = 0{,}2$
équivaut à $-\lambda.5 = \ln(0{,}2)$
équivaut à $-\lambda.5 = \ln(\frac{1}{5})$
équivaut à $\lambda.5 = \ln 5$. D'où $\lambda = \frac{\ln 5}{5}$

2) p(T < 3)= $1 - e^{-\lambda.3} \cong 0{,}62$

3) p(1< T < 3)= $e^{-\lambda.1} - e^{-\lambda.3} \cong 0{,}34$

4) p(T > 3/ T > 1)= p(T > 2)= $e^{-\lambda.2} \cong 0{,}53$

EXERCICE 3 : (3 points)

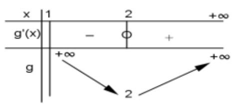
1) c) En effet :
PGCD(21,7)=7 or 7 ne divise pas 25 alors l'équation (E) n'a pas de solutions dans ℤ×ℤ

2) a) En effet :
1×(2n+1)+(−1) ×n=1 alors d'après l'identité de Bézout 2n+1 et n sont premiers entre eux.

3) c) En effet :
$3 \equiv -1[4]$ alors $3^{2n} \equiv (-1)^{2n}[4]$
$\equiv 1[4]$. Donc $1+3^{2n} \equiv 2[4]$

EXERCICE 4 : (7 points)

A/ 1)



2) • g(2)=2 équivaut à 2a = 2 équivaut à a =1

• g'(x)= $\frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1}$
g'(2)=0 équivaut à −1 + b = 0 équivaut à b =1

3) a) $\int_2^{e+1} \frac{x}{x-1} dx = \int_2^{e+1} 1 + \frac{1}{x-1} dx = [x + \ln|x-1|]_2^{e+1}$
$= e + 1 + 1 - 2 = e$

b) $\mathcal{A} = \int_2^{e+1} |g(x) - x|\, dx = \int_2^{e+1} (x - \frac{x}{x-1} - \ln(x-1))dx$

$= \int_2^{e+1} x\, dx - \int_2^{e+1} \frac{x}{x-1}\, dx - \int_2^{e+1} \ln(x-1)\, dx$

$*$ On pose : $\begin{cases} u(x) = \ln(x-1) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x-1} \\ v(x) = x \end{cases}$

$\int_2^{e+1} \ln(x-1)\, dx = [x.\ln(x-1)]_2^{e+1} - \int_2^{e+1} \frac{x}{x-1}\, dx$

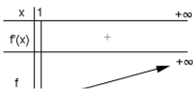
$= e + 1 - e = 1$

$*$ $\int_2^{e+1} x\, dx = [\frac{x^2}{2}]_2^{e+1} = \frac{(e+1)^2}{2} - 2$

D'où $\mathcal{A} = \frac{(e+1)^2}{2} - 2 - e - 1 = \frac{e^2-5}{2}$ (u.a)

B/ 1) $f'(x) = \ln(x-1) + x\frac{1}{x-1} = g(x)$

2)



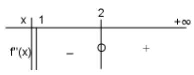
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x-1) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$ (où $X = x - 1$)

Alors (C) admet au v(+∞) une branche parabolique de direction celle de $(0,\vec{j})$.

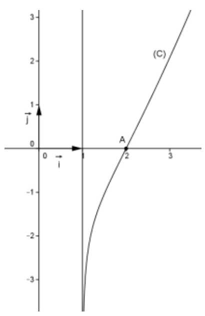
4) La fonction $f' = g$ est dérivable sur $]1,+\infty[$.

$f''(x) = g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{(x-1)^2}$

Alors A(2,0) est un point d'inflexion de la courbe (C).



5)



C/ 1) a) $I_1 = \int_2^e x\ln(x-1)\,dx = \int_2^e f(x)dx$

$f(x) \geq 0$ pour tout réel x de l'intervalle [2,e], alors I_1 est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (c), l'axe $(0,\vec{i})$ et les droites d'équations : x = 2 et x = e.

b) $\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$

c) On pose : $\begin{cases} u(x) = \ln(x-1) \\ v'(x) = x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x-1} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Alors $I_1 = \int_2^e x\ln(x-1)\,dx = [\frac{x^2}{2}.\ln(x-1)]_2^e - \frac{1}{2}\int_2^e \frac{x^2}{x-1}\,dx = \frac{e^2}{2}.\ln(e-1) - \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2} + x + \ln(x-1)]_2^e$

$= \frac{e^2}{2}.\ln(e-1) - \frac{1}{2}(\frac{e^2}{2} + e + \ln(e-1) - 4)$

$= \frac{e^2-1}{2}.\ln(e-1) - \frac{e^2+2e-8}{4}$

2) a) $2 \leq x \leq e$ signifie que $1 \leq x-1 \leq e-1$ alors $1 \leq x-1 \leq e$ car $e-1 \leq e$

Donc $0 \leq \ln(x-1) \leq 1$ car la fonction ln est croissante sur [1,e].

Et par la suite en multipliant par le réel positif x^n on obtient l'encadrement

$0 \leq x^n\ln(x-1) \leq x^n$

b) On a : $0 \leq x^n\ln(x-1) \leq x^n$ pour tout réel x de [2,e] et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

En intégrant terme par terme sur [2,e], on obtient : $0 \leq \int_2^e x^n\ln(x-1)\,dx \leq \int_2^e x^n dx$

Or $\int_2^e x^n dx = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_2^e = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{2^{n+1}}{n+1}$ alors $\int_2^e x^n dx \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}$ car $\frac{2^{n+1}}{n+1} > 0$

D'où $0 \leq I_n \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n}\frac{e^{n+1}}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{e^n} = 0$ (d'après le théorème de comparaison)