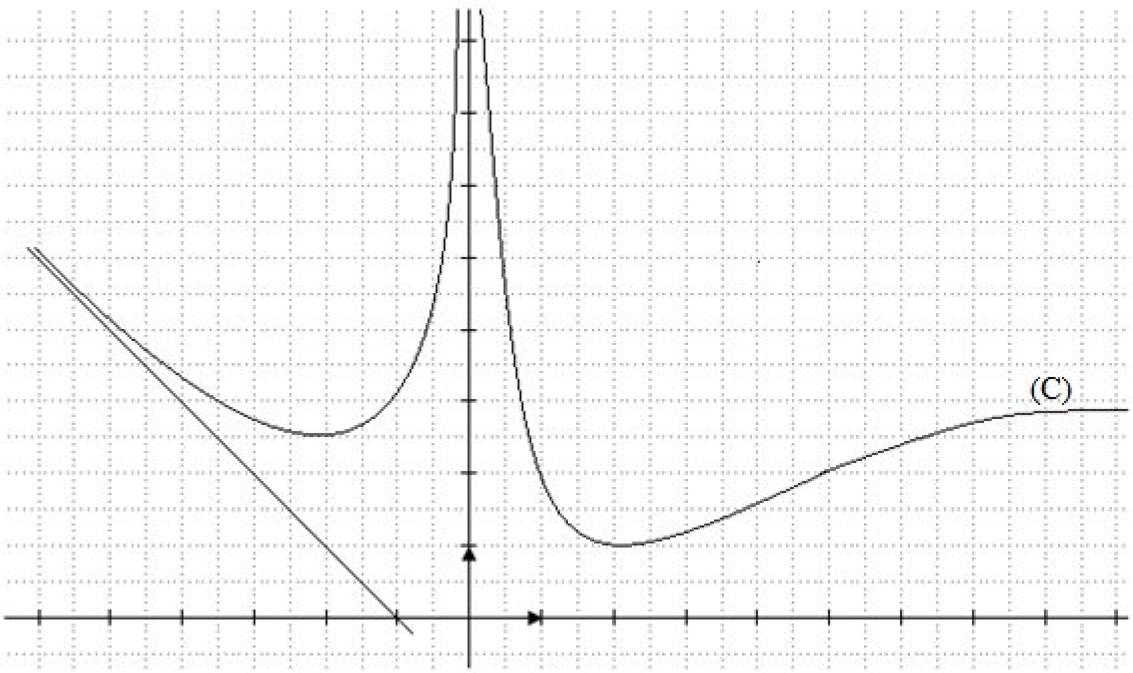
Lycée secondaire Zanouch Date: 14 novembre 2015 Prof: Mr.Smairy.J	**Devoir de contrôle de mathématiques n°1** Niveau: 4ème année (sciences informatiques) Durée: 2 heures

Exercice 1: *(7 points)*

❶ On donne ci-dessous la courbe (C), dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$.

La courbe (C) admet trois asymptotes d'équations respectives $y = 3$, $y = -x - 1$ et $x = 0$.



a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x + 1$.

b) Montrer que f admet une limite en 0.

c) Déterminer les images par f de chacun des intervalles suivants: $]0, +\infty[$ et $]1 , 5 [$.

d) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$.

e) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$.

❷ On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction g définie sur $]-\infty, 2[$.

x	$-\infty$	1	2
g	-3 ↗	2 ↗	$+\infty$ ‖

a) Interpréter graphiquement les limites de g en $-\infty$ et à gauche en 2.

b) Tracer une allure possible de la courbe de g.

❸ Soit la fonction composée $h = g \circ f$.

a) Calculer $h(2)$.

b) Montrer que h est définie sur $]1 , 5 [$.

c) Calculer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

d) Dresser le tableau de variation de h.

Exercice 2: (6 points)

❶ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 4 - i$, $z_B = 1 + 2i$ et $z_C = -3 - 2i$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Montrer que $(z_C - z_B)(\overline{z_A - z_B}) = -24i$.

c) En déduire que le triangle ABC est rectangle en B.

❷ Soit I le point d'affixe $z_I = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

a) Vérifier que I est le milieu du segment [AC].

b) Déterminer l'affixe du point D symétrique du point B par rapport à I.

c) Montrer que ABCD est un rectangle.

❸ Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|2z - 1 + 3i| = 5\sqrt{2}$.

a) Vérifier que le point C appartient à l'ensemble $\mathscr{C}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{C}$.

Exercice 3: (3 points)

❶ Montrer que 19 divise $7637^{2015} + 9558^{2016}$.

❷ Déterminer le reste de la division euclidienne par 17 du nombre 855167^{2015}.

❸ Déterminer le chiffre d'unité du nombre 1437^{2016}.

❹ Montrer que $14^{12} \equiv 11^{13}\ [5]$.

Exercice 4: (4 points)

Soit U est la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{4-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❶ Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

❷ Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-2)(u_n-3)}{4-u_n}$

❸ En déduire que la suite U est croissante.

❹ Montrer que la suite U converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.