DEVOIR DE CONTROLE

TAYACHI JAMEL N1 4 INFO

EXERCICE ❶

2.5 pts

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse:

1. La partie réelle de $\dfrac{3+5i}{2+i}$ est $\dfrac{3}{2}$.
2. Le conjuguée de $(1+ia)$ est $(1-ia)$ ou $a \in \mathbb{C}$
3. $\left(\dfrac{5-i}{1+2i}\right)^7 + \left(\dfrac{5+i}{1-2i}\right)^7$ est un nombre réelle.
4. Toute suite majorée est convergente.
5. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right) = 0$

EXERCICE ❷

4.5 pts

1. (a) Ecrire sous la forme algébrique le nombre complexe $U = (1-i)^2$.

   (b) Résoudre dns $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 3(1+i)z + 5i = 0$
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe$(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$,on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1+i, b = 2+i$ et $c = 1+2i$.

   (a) Placer les points A, B et C sur une figure.

   (b) Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

   (c) Déterminer l'affixe z_D du points D pour que $ACDB$ est un carré.
3. Soit Δ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\left|\dfrac{z-(2+i)}{z-(1+2i)}\right| = 1$

   Déterminer et construire Δ.

EXERCICE ❸

6 pts

On considère la suite U définie par: $\begin{cases} U_0 &= 0 \\ U_{n+1} &= \dfrac{6-U_n}{4-U_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a $U_n < 2$

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n-2)(U_n-3)}{4-U_n}$.

   (c) Montrer que la suite U est croissante.

(d) Déduire que U est convergente.

2. Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par:$V_n = \dfrac{2U_n - 6}{U_n - 2}$

   (a) Montrer que V est une suite géométrique e raison 2.
   (b) Exprimer V_n en fonction de n.
   (c) Déduire que,pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = \dfrac{6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.
   (d) Calculer alors $\lim U_n$.

EXERCICE ❹ 3 pts

Soit $f(x) = \dfrac{x - \sin x}{1 + x^2}$.

1. Déterminer D_f (le domaine de définition de f).
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}; \dfrac{x-1}{1+x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{1+x}{1+x^2}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   (c) Interpréter graphiquement le résultat.

EXERCICE ❺ 4pts

Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-1} & \text{si } x \geq 0 \\ x + 1 + \dfrac{2}{x+3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. conclure.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter le résultat.
3. Montrer que $(x = 1)$ est asymptote verticale.
4. calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que C_f admet une asymptote oblique dont on donnera une éqaution.