Devoir de contrôle n°①

$4^{\text{ème}}$ Sciences de l'informatique

Prof : NOBBIGH Dhaou

Mardi 11 novembre 2014

Durée : 2 Heures

EXERCICE ① — 6 points

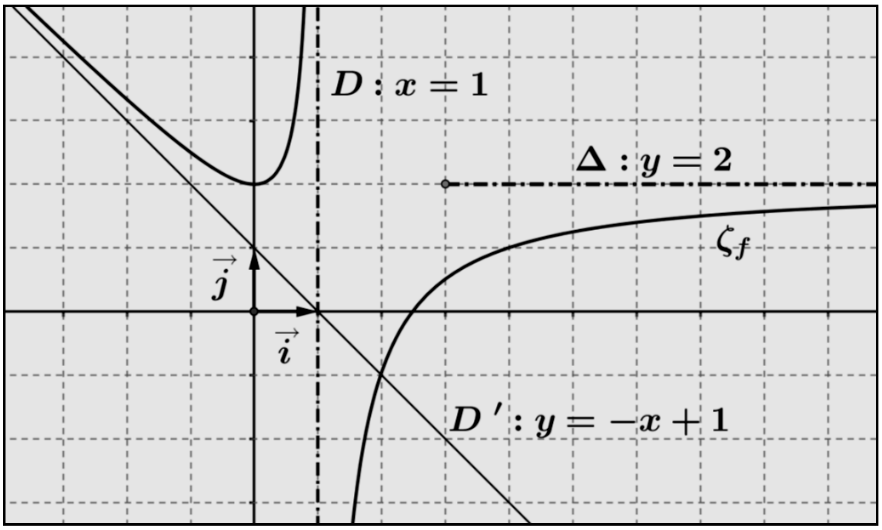
1) Dans la figure ci-contre :

∗ $\mathbf{C_f}$ est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormé $(\mathbf{O};\vec{\mathbf{i}};\vec{\mathbf{j}})$.

∗ La droite $\Delta : \mathbf{y = 2}$ est une asymptote à $\mathbf{C_f}$ au voisinage de $+\infty$.

∗ La droite $\mathbf{D} : \mathbf{x = 1}$ est une asymptote verticale à $\mathbf{C_f}$.

∗ La droite $\mathbf{D'} : \mathbf{y = -x + 1}$ est une asymptote oblique à $\mathbf{C_f}$ au voisinage de $-\infty$.



Par lecture graphique :

a) Résoudre dans IR, l'équation : $\mathbf{f(x) = 2}$

b) Préciser $\lim\limits_{1^-} \mathbf{f(x)}$; $\lim\limits_{1^+} \mathbf{f(x)}$; $\lim\limits_{+\infty} \mathbf{f(x)}$; $\lim\limits_{-\infty} \mathbf{f(x)}$ et $\lim\limits_{-\infty} (\mathbf{f(x) + x - 1})$

c) Dresser le tableau des variations de f.

2) Soit g une fonction définie et continue sur $\mathbf{IR} \setminus \{\mathbf{2}\}$ et dont le tableau des variations est le suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g(x)$	0	↘	-2	↗	$+\infty$ ‖ 6	↘	$-\infty$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\mathbf{g \circ f}$.

b) Déterminer $(\mathbf{g \circ f})(\mathbf{2})$; $\lim\limits_{0} (\mathbf{g \circ f})(\mathbf{x})$; $\lim\limits_{1^-} (\mathbf{g \circ f})(\mathbf{x})$ et $\lim\limits_{+\infty} (\mathbf{g \circ f})(\mathbf{x})$

c) Déterminer le sens des variations de la fonction $\mathbf{g \circ f}$ sur l'intervalle $[\mathbf{2}\,; +\infty[$

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

EXERCICE ② 7 points

Soit U la suite définie sur IN par $\mathbf{U_0 = 1}$ et $\mathbf{U_{n+1} = \frac{3U_n+6}{4+U_n}}$ pour tout entier naturel n.

1) a) Calculer $\mathbf{U_1}$ et $\mathbf{U_2}$.
   b) Justifier que la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) a) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a : $\mathbf{U_{n+1} = 3 - \frac{6}{4+U_n}}$
   b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\mathbf{-3 < U_n < 2}$
   c) Montrer que la suite U est croissante.
   d) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.
3) Pour $\mathbf{n} \in$ IN, on pose $\mathbf{V_n} = \frac{\mathbf{U_n-2}}{\mathbf{U_n+3}}$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $\mathbf{U_n} = \frac{\mathbf{2+3V_n}}{\mathbf{1-V_n}}$.
   b) Montrer que la suite V est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$
   c) Exprimer $\mathbf{V_n}$ puis $\mathbf{U_n}$ en fonction de n.
   d) Retrouver alors $\lim\limits_{+\infty} \mathbf{U_n}$

EXERCICE ③ 7 points

1) a) Mettre sous forme cartésienne le nombre complexe $(\mathbf{4-2i})^{\mathbf{2}}$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $\mathbf{z^2 + (2-4i)z - 6 = 0}$.
2) Pour un nombre complexe z, on pose : $\mathbf{f(z) = z^3 + (2-2i)z^2 + (2+4i)z - 12i}$.
   a) Montrer que l'équation $\mathbf{f(z) = 0}$ admet une solution imaginaire pure $\mathbf{z_0}$ que l'on déterminera.
   b) Déterminer les nombres complexes b et c tels que : $\mathbf{f(z) = (z+2i)(z^2+bz+c)}$.
   c) Résoudre alors l'équation $\mathbf{f(z) = 0}$.
3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$. On donne les points A, B et C d'affixes respectives $\mathbf{-2i}$; $\mathbf{1+i}$ et $\mathbf{-3+3i}$. Soit D le symétrique de C par rapport à O
   a) Justifier que $\mathbf{z_D = 3-3i}$
   b) Placer les points A, B, C et D.
   c) Calculer AB, AD et BD. En déduire la nature du triangle ABD.
   d) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{3} + \mathbf{3i}| = |\mathbf{z} + \mathbf{2i}|$