Lycée Tamaghza 2013-2014	Devoir de Synthèse N° 3	Classe : 4ème SI

Exercice 1 : (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la réponse exacte et donner une justification de la réponse choisie.

E et F étant deux évènements d'un univers tels que $p(E)=0,4$ & $p(F)=0,3$ & $p(E\cap F)=0,2$.

1. $p(E\cup F)$ est égal à :

(a) $0,1$ **(b)** $0,5$ **(c)** $0,7$

2. $p(E\cap \overline{F})$ est égal à :

(a) $0,1$ **(b)** $0,2$ **(c)** $0,4$

3. $p_E(F)$ est égal à :

(a) $\frac{2}{3}$ **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{3}{4}$

Exercice 2 : (4 points)

1. a. Vérifier que $(-1+2i)^2=-3-4i$.

1. b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(3+4i)z+7i-1=0$

2. On considère l'équation dans $\mathbb{C}$: $P(z)=0$, où $P(z)=z^3-(3+5i)z^2+(-5+10i)z+7+i$.

2. a. Vérifier que $P(i)=0$.

2. b. Déterminer les deux nombres complexes s et p tels que l'on ait : $P(z)=(z-i)(z^2-sz+p)$.

2. c. En déduire les solutions de l'équation : $P(z)=0$.

Exercice 3 : (5 points)

1. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3.

2. Dans un certain pays, le temps est soit sec soit humide.

Son évolution obéit à la règle immuable suivante :

Si le temps est sec aujourd'hui, il sera sec demain avec la probabilité $\frac{4}{5}$.

Si le temps est humide aujourd'hui, il sera humide demain avec la probabilité $\frac{3}{5}$.

On désigne par : S_n l'événement « le temps est sec le nième jour ».

H_n l'événement « le temps est humide le nième jour ».

On note s_n et h_n les probabilités respectives de ces événements.

2. a. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que : $\begin{cases} s_{n+1} = \frac{4}{5}s_n + \frac{2}{5}h_n \\ h_{n+1} = \frac{1}{5}s_n + \frac{3}{5}h_n \end{cases}$

2.b Vérifier que $\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ h_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} s_n \\ h_n \end{pmatrix}$.

3. Nous sommes dimanche et il fait sec. Quelle est la probabilité que le temps soit :

3. a. Sec mardi ?

3. b. Humide mercredi ?

Exercice 4 : (7 points)

On considère la fonction réelle f définie par : $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé xOy du plan.

1. a. Donner $f(0); f(1)$ et $f(-1)$.

1. b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

1. c. Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2e^{-x}$. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. On note f' la fonction dérivée de f.

2. a. Démontrer que $f'(x)=(-x^2+x)e^{-x}$.

2. b. Donner le tableau des variations de la fonction f.

3. On note f'' la fonction dérivée seconde de f.

3. a. Démontrer que $f''(x)=(x^2-3x+1)e^{-x}$.

3. b. On note α *et* β les deux solutions de l'équation $x^2-3x+1=0$ (on ne cherchera pas à les calculer).

Démontrer que $I(\alpha,f(\alpha))$ et $J(\beta,f(\beta))$ sont deux points d'inflexion de ***C***.

3 c. Prouver que $f(\alpha)=4\alpha e^{-\alpha}$ et $f(\beta)=4\beta e^{-\beta}$.

4. Démontrer que la fonction réelle F telle que : $F(x)=-(x^2+3x+4)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

5. Soit λ un réel positif.

On note A_λ l'aire du domaine limité par la courbe ***C***, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ *et* $x=\lambda$.

5 . a. Etablir que $A_\lambda=4-(\lambda^2+3\lambda+4)e^{-\lambda}$ (unités d'aire).

5 . b. Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda$.