L.S.Menzel Hayat	**Devoir de Synthèse 2**	Afli Ahmed
05 Mars 2013	Durée :3h	4sc.informatique

Exercice1 : (3points)

Répondre par Vrai ou Faux

1. Pour tout entier naturel non nul n ,PGCD(2n ; 2n+1) est égal à 2n. ....
2. Le chiffre des unités de l'entier 2013^{2012} est : 1 ....
3. L'équation 10x - 4y = 4 n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$. ....

Exercice n°2: (6points)

A. Lecture graphique :

Soit la fonction f définie sur [0 ;+∞[par : $\begin{cases} f(x) = a + bx\ln(x) \text{ si } x \in]0;+\infty[\\ f(0) = 1 \end{cases}$

- (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ;$\vec{i},\vec{j}$)
- (C) admet une tangente horizontale au point A($\frac{1}{e}$; $1+\frac{2}{e}$) .
- La tangente à(C) en B(1,1) passe par le point C(2,-1).

1. / Donner f(1), f '(1) , f '($\frac{1}{e}$) et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$
2. /Calculer f '(x) pour tout x de]0 ;+∞[
3. / En déduire les valeurs de a et b.
4. / Dresser le tableau de variation de f.

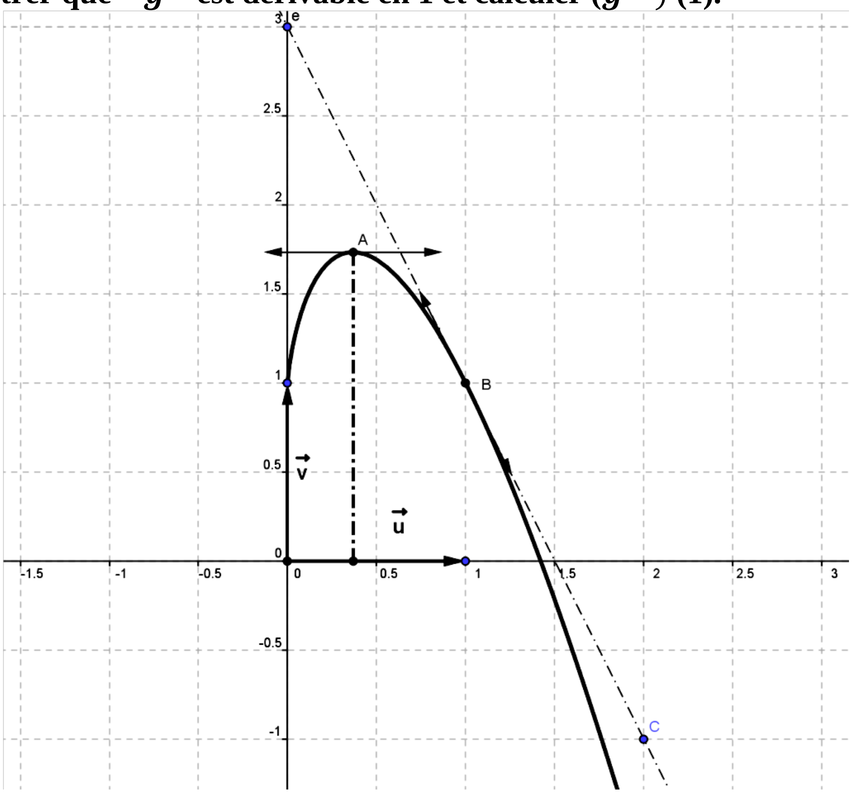
B) Dans cette partie on admet que : a=1 et b= -2.

Soit g la restriction de f sur [$\frac{1}{e}$; $+\infty$[

1. / a. Montrer que g réalise une bijection de [$\frac{1}{e}$; $+\infty$[sur un intervalle J que l'on déterminera.

b. Donner g($\frac{1}{e}$).Expliquer pourquoi g^{-1} n'est pas dérivable à droite de $1+\frac{2}{e}$.

c. Montrer que g^{-1}est dérivable en 1 et calculer $(g^{-1})'(1)$.



Exercice 3 :(7points)

1. / On a représenté ci-dessous le tableau de variation de la fonction g

définie sur]0 ;+∞[par : g(x) = $x^2 - 1 + \ln x$.

x	0	1	$+\infty$
g ’(x)		+	
g(x)	$-\infty$	0	$+\infty$

Déterminer le signe de g(x) .

2. / Soit f la fonction définie sur]0 ;+∞[par f(x) = $x - 1 - \frac{\ln x}{x}$. On désigne par (C) la courbe la courbe de f dans un repère orthonormé (O ;$\vec{i}, \vec{j}$)

a. Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

c. Montrer que la droite Δ: $y = x - 1$ est une asymptote à (C).

d. Etudier la position relative de (C) et Δ.

3. / a. Montrer que pour tout x ∈]0 ;+∞[, f ’(x) = $\frac{g(x)}{x^2}$

b. Déterminer le signe de f ’(x) et dresser le tableau de variation de f.

4. / Tracer la droite Δ et la courbe (C).

5. / Montrer que la fonction F(x)= $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln^2(x) - x + 1$ est une primitive de f sur]0 ;+∞[

Exercice 4 : (4points)

On considère l’équation (E) : 5x + 7y = 1 , (x , y) ∈ $\mathbb{Z}^2$

1. / Justifier que (E) admet des solutions entières.

2. / Vérifier (3 ;-2) est solution de (E).

3. / Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l’équation (E)

Soit N un entier naturel tel que il existe deux entiers a et b versifiant : $\begin{cases} N = 5a + 2 \\ N = 7b + 1 \end{cases}$

a. Monter que le couple (-a,b) est solution de (E)

b. Déduire que N ≡ $22[35]$

Bon travail