Lycée Ibn Khaldoun Oueslatia *Prof : M Mehrez Jamel*	**Devoir de Synthèse n°1 En Mathématiques**	**Classe : $4^{ème}$ Sc Inf Date : 0 3 / 12 / 2013 Durée : 2 heures**

<u>Exercice n° 1</u> : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} + x^2 - 4$.

1) a) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

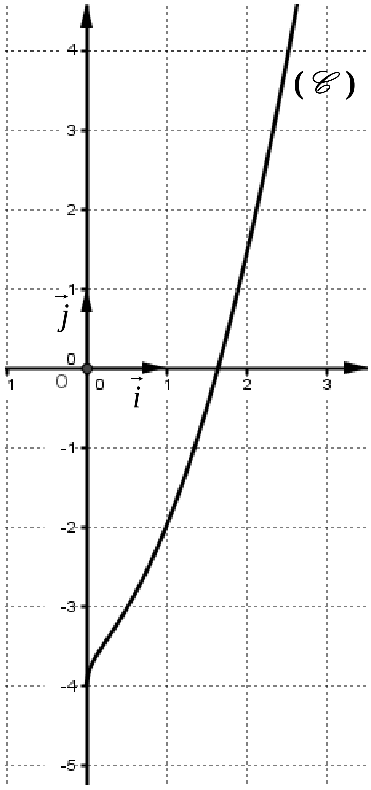
2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1{,}6 ; 1{,}7[$.

3) On donne ci-dessous la courbe ($\mathscr{C}$) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A partir du graphique

a) Déterminer : $f(0)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Déterminer l'image de $[0 ; 1]$ et $[\alpha, +\infty[$ par f .



<u>Exercice n° 2</u> : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

1) a) Montrer que f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera .

2) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f . Déterminer l'expression de f^{-1} .

Exercice n° 3 : **(6 points)**

1) Résoudre dans C , l'équation $z^2 - (3+4i)z - 8 + 6i = 0$.

2) On considère , l'équation $(E) : z^3 - (1+4i)z^2 - (14+2i)z - 16 + 12\,i = 0$.

a) Vérifier que (-2) est une solution de (E) .

b) Déterminer les nombres complexes b et c tels que

$$z^3 - (1+4i)z^2 - (14+2i)z - 16 + 12\,i = (z+2)(z^2 + bz + c) .$$

c) Résoudre alors , l'équation (E) .

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, **(On prend** $\|\vec{u}\| = 1\,cm$ **)** .

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1 + 2i$ et $z_B = 4 + 2i$.

a) Placer les points A et B .

b) Montrer que le triangle OAB est rectangle ?

c) Déterminer l'affixe z_C du point C tel que OACB soit un rectangle .

Exercice n° 4 : **(6 points)**

Soit la suite (U_n) définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2 + U_n} \end{cases}$, $\forall\, n \in IN$.

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n > 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante .

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite .

2) Soit la suite (V_n) définie sur IN par $V_n = \dfrac{U_n}{1 + U_n}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

b) Calculer V_n puis U_n en fonction de n .

c) Trouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.