Lycée secondaire : Ibn Khaldoun

A/S :2012 - 2013

Devoir de synthése N°2
Epreuve :
Mathématiques
Durée : 3 H

Classe: $4^{\text{ième}}$ Inf

Proposé par :
Arfaoui khaled

<u>Exercice 1</u> : (3 points)

L'élève doit écrire sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la bonne réponse

1°/ le nombre réel $\ln(\frac{1}{\sqrt{e}})$ est égale à :

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $-\frac{1}{2}$

2°/ la limite de la fonction $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x^2}$ à gauche en 0 est

a) 2 b) $+\infty$ c) $-\infty$

3°/ le nombre réel $e^{-2\ln(\frac{1}{\sqrt{e}})}$ est égale à :

a) e b) 1 c) - e

4°/ la fonction $f(x) = \ln(\ln x)$ est définie sur $]0,+\infty[$

a) vrai b) faux

EXERCICE N°2 (4pts)

Soit A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1/ Calculer déterminant de A et en déduire que A est inversible

2/ a) Calculer A^2 puis $B = 4A - A^2$ et le produit A.B .

b) En déduire A^{-1} la matrice inverse de A

3/ Résoudre Dans IR^3 le système S : $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ -3x + y - z = 5 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

EXERCICE N°3 (5 pts)

On considère la suite définie sur IN* par : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1/ Calculer I_1 au moyen d'une intégration par parties

2/ a) Montrer que pour tout n de IN* , $I_n \geq 0$

b) Montrer que I_n est décroissante et en déduire qu'elle est convergente

3/ a) En utilisant une intégration par parties , démontrer que pour tout n de IN* :

$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

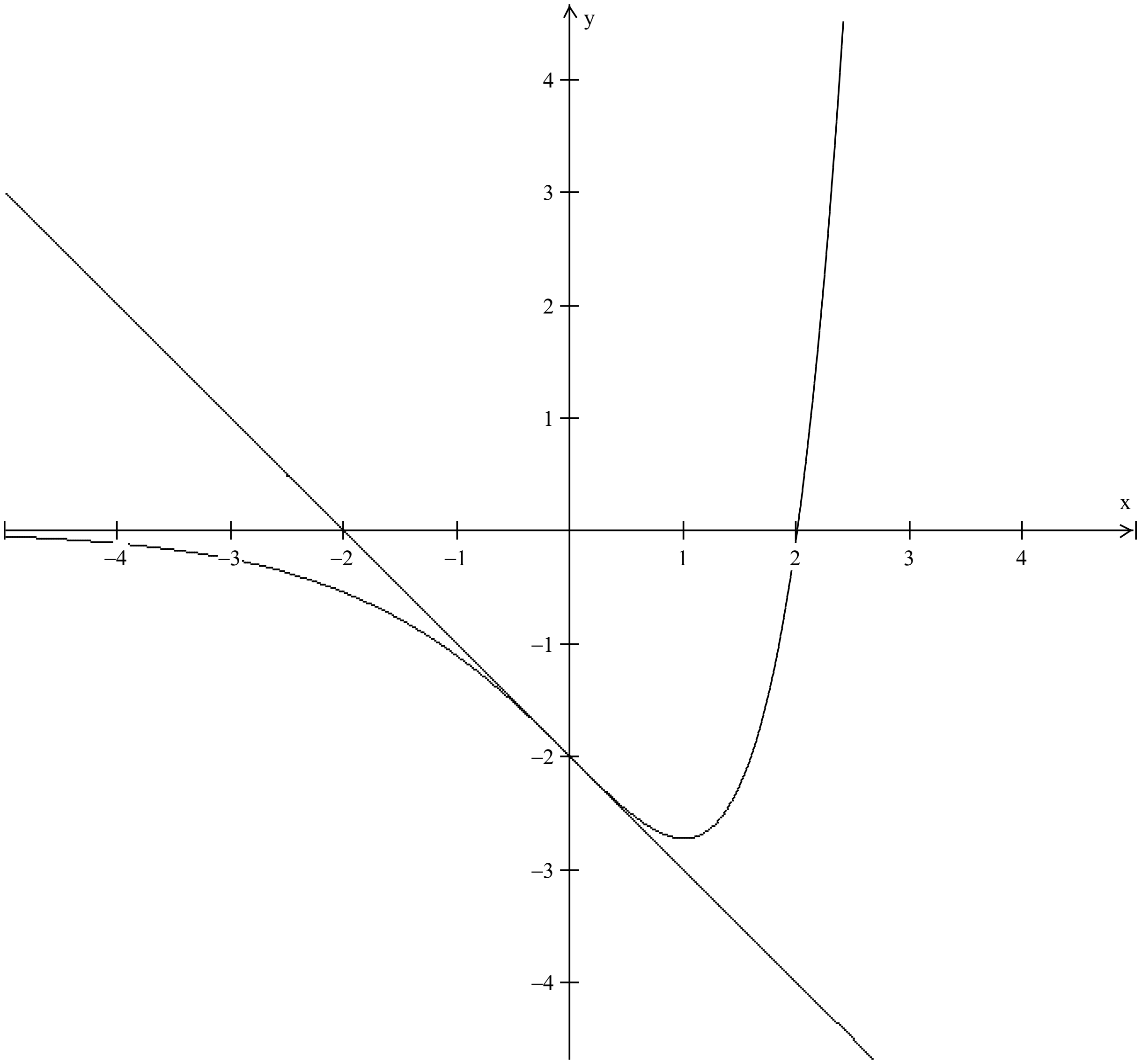
b) En déduire que pour tout n de IN* , on a : $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$

c) Déduire alors $\lim_{n \to +\infty} I_n$

EXERCICE N°4 (8pts)

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthogonal , la courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie sur IR la tangente D à la courbe (C) au point A(0, -2) passe par le point B (2 , -4)



On désigne par f ' la fonction dérivée de f

1) a) Donner la valeur de f(0)

   b) Justifier que f '(0) = -1

2) On admet qu'il existe deux réels a et b tels que , pour tout réel x , $f(x) = (x + a)\, e^{bx}$

   a) Vérifier que pour tout réel x , $f'(x) = (bx + ab + 1)\, e^{bx}$

   b) Utiliser les résultats précédents pour déterminer les valeurs exactes de a et b

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie sur IR par $f(x) = (x-2)e^{x}$

1) Donner l'expression de f ' ; En déduire le sens de variation de f
2) a) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

   b) Déterminer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) En intégrant par parties Calculer $\int_{2}^{3} f(x)\,dx$

4) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites x= 1 et x = 3