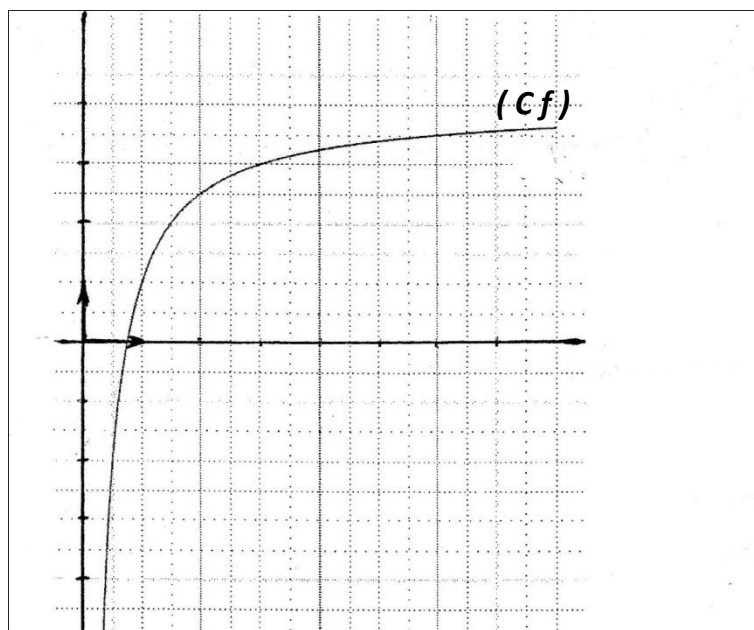




**EXERCICE N: 3 (4.5 points)**



On a représenté ci-dessus dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = 4 - \frac{3}{x}$ .

Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_0 = 5$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$ .

- 1) a) Tracer la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  et représenter sur l'axe  $(O, \vec{i})$  les termes  $U_0, U_1$  et  $U_2$ .  
b) Quel conjecture sur la monotonie et la convergence peut-on faire ?
- 2) a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $3 \leq U_n$ .  
b) Montrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante sur  $\mathbb{N}$ .  
c) Montrer que la suite  $(U_n)$  est convergente et calculer sa limite.

**EXERCICE N: 4 (6 points)**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :  $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par  $(Cf)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 3) a) Montrer que pour tout  $x \in ]-\infty; 0[$  on a :  $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$ .  
b) Montrer que  $f$  est continue en 0.
- 4) Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 1.
- 5) a) Déterminer le domaine de continuité de  $f$ . (Justifier la réponse)  
b) Sans résoudre l'équation  $f(x) = 2$  montrer qu'elle admet une solution  $\alpha$  dans  $]1.6; 1.7[$ .