Lycée Tahar Sfar Mahdia

DEVOIR DE SYNTHESE N° 2

Mathématiques

Classe : 4 ème Info

Date : 07 / 03 / 2012 — Prof : Meddeb Tarak — Durée : 3 heures

Exercice n°1 : (3 pts)

Pour chaque question , une seule des trois propositions a/, b/ et c/ est exacte. On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie sans justification.

Une réponse exacte rapporte 0,75 point, une réponse inexacte enlève 0,25 point, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, alors la note sera ramenée à zéro.

1) Le nombre $A = 2\ln\left(\frac{e}{4}\right) + 5\ln 2 + \ln\left(\frac{8}{e}\right)$ est égal à :

   $a/\ 1 + 2\ln 5$ $\qquad b/\ 8\ln 2$ $\qquad c/\ 1 + 4\ln 2$

2) L'équation : $\ln x = x - 2$ admet exactement :

   $a/$ Une solution.

   $b/$ Deux solutions de signes contraires.

   $c/$ Deux solutions de même signe.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$ est égale à :

   $a/\ 1$ $\qquad b/\ 2$ $\qquad c/\ 0$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - x\ln x\right)$ est égale à :

   $a/\ 0$ $\qquad b/\ -\infty$ $\qquad c/\ +\infty$

Exercice n°2 : (5 pts)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $a/$ Montrer que A est inversible.

   $b/$ Calculer A^2, puis vérifier que $2A - A^2 = I_3$.

   $c/$ En déduire que $A^{-1} = 2I_3 - A$ où A^{-1} est la matrice inverse de A.

2) Soit le système S: $\begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$

   $a/$ Vérifier que S peut s'écrire sous la forme matricielle : $A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   $b/$ Résoudre alors le système S.

Exercice n°3 : (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $f(x) = x + \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

1) Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) $a/$ Montrer que, pout tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{x(2x+1)}$.

   $b/$ Etablir le tableau de variations de f.

3) $a/$ Montrer que la droite $\Delta: y = x + \ln 2$ est une asymptote de C_f.

   $b/$ Etudier la position de C_f par rapport à Δ.

4) Tracer Δ et C_f. On prendra $2cm$ pour unité graphique.

5) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

   $a/$ Montrer que g est une bijection de $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   $b/$ On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g.

   Tracer $C_{g^{-1}}$ la courbe représentative de g^{-1}dans le repère $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

Exercice n°4 : (7 pts)

Dans la feuille annexe ci-jointe, on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ la courbe représentative C de la fonction logarithme népérien $(\ln)$.

1) Placer sur la courbe C les points d'abscisses e et $\sqrt{e}$.
2) Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x + 1$.

   On note C_f sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

   $a/$ Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   $b/$ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résultat.

   $c/$ Montrer que, pour tout $x \in]0\,,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x}$.

   $d/$ Calculer $f'\left(\sqrt{e}\right)$, en déduire le tableau de variations de f.

3) $a/$ Etudier la position relative des courbes C_f et C.

   $b/$ Tracer C_f dans l'annexe ci-jointe. Préciser $f(1)$.

Nom et prénom :………………………………………………………   *Classe :……..*

<u>FEUILLE ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE</u>