Lycée Tahar Sfar Mahdia

DEVOIR DE CONTROLE N° 1

Mathématiques

<u>Classe</u>: 4 ème Info

<u>Date</u> : 07 / 12 / 2011

<u>Prof</u>: MEDDEB Tarak

Durée : 2 heures

Exercice nº1: (5 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4} - 3 & \text{si } x \le 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- 1) En remarquant que : pour x > 0, $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
- 2) a/ Montrer que, pour tout x > 0, on a : $-x 1 \le f(x) \le x 1$. En déduire $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

b/ La fonction f est-elle une continue en 0 ?

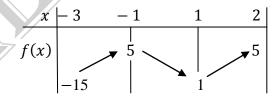
3) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 2^{+}} f\left(\frac{1}{x-2}\right), \lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{2x+1}{\pi x-2}\right) \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{3x}{x^{2}+1}\right)$$

Exercice n°2: (4 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^3 - 3x + 3$.

On admet que les variations de f sur l'intervalle [-3,2] sont données par le tableau suivant :



1) Déterminer, en utilisant le tableau :

$$a/f([-3,1]), f([-1,2]).$$

b/ Le nombre de solutions de chacune des équations : f(x) = 3 , f(x) = 0.

2) On note α la solution de l'équation : f(x) = 0. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,5.

Exercice n°3: (5 pts)

- 1) Soit n un entier naturel. Démontrer l'équivalence : (n n'est pas multiple de 5) si et seulement si ($n^4 - 1$ est multiple de 5).
- 2) Soient a et b deux entiers naturels.
 Traduire en terme de congruence la propriété : « a et b ont le même chiffre des unités ».
- 3) Soient $n \in IN$ et $p \in IN^*$.
 - a/ Démontrer que : $n^{p+4} n^p$ est pair.
 - b/ Démontrer que : $n^{p+4} n^p$ est divisible par 5.
 - c/ En déduire que n^{p+4} et n^p ont le même chiffre des unités.

Exercice n°4: (6 pts)

- 1) Soit f la fonction définie sur [1,2] par : $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$. Montrer que f est croissante sur [1,2] et déterminer f([1,2]).
- 2) On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = f\left(U_n\right) \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$
 - a/ Montrer que, $1 \le U_n \le 2$ pout tout $n \in IN$.
 - b/ Montrer que la suite U est croissante.
 - c / En déduire que U est convergente et calculer sa limite.
- 3) On pose, pour tout $n \in IN$, $V_n = \frac{U_n 2}{U_n 1}$.
 - a/ Montrer que V est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
 - b/ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
 - c/Retrouver la limite de la suite U.

Bonne chance