

Section : SC –
Informatique

coef : 3

Durée : 3h

I- ibn khaldoun Oueslatia :
Mai 2011

Prof : Arfaoui - khaled

Feuille à rendre avec la copie

Exercice 1 : (3 points)

L'élève doit écrire sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la bonne réponse

1/ la limite de la fonction $f(x) = x e^{-\frac{1}{x}}$ à gauche en 0 est :

a) 0

b) $+\infty$ c) $-\infty$

2/ le reste de la division euclidienne de -24 par 5 est :

a) 4

b) 1

c) -4

3/ soit n un entier tel que tel que

$n \equiv 19 \pmod{20}$ alors le reste modulo 20 de $n^{200} + n^{191}$ est :

a) 19

b) 2

c) 0

4/ la limite de la fonction $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x^2}$ à gauche en 0 est

a) 2

b) $+\infty$ c) $-\infty$

5/ la limite de la fonction $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ en $-\infty$ est

a) 0

b) 1

c) $+\infty$

6/ la fonction $f(x) = \ln(\ln x)$ est définie sur $]0, +\infty[$

a) vrai

b) faux

Exercice 2 (4pts)

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 14 \\ 7 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

1/ a) Calculer déterminant de A et en déduire que A est inversible

b) Calculer A . B et en déduire A^{-1} la matrice inverse de A

2/ Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système $S : \begin{cases} 2x - y + 2z = 3 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \\ x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$

Exercice 3 (6.5 pts)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par $f(x) = \sqrt{1-e^x}$. On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonomé (o, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique 2 cm)

1/ a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et interpréter graphiquement ce résultat

b) Etudier les variations de f sur $]-\infty, 0]$

2/ a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans le même repère (o, \vec{i}, \vec{j})

3/ a) Montrer que pour tout x de $[0, 1[$, $f^{-1}(x) = \ln(1-x^2)$

b) Soit $F(x) = (x-1) \ln(1-x) + (x+1) \ln(1+x) - 2x$ pour $x \in [0, 1[$

Montrer que F est une primitive de f^{-1} sur $[0, 1[$

c) Vérifier que $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln 2 + 2 \ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}$

d) Soit A l'aire de la partie limitée par $C_{f^{-1}}$ et les droites $y = -\ln 2$, $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Montrer que $A = (8 \ln(1+\sqrt{2}) - 4\sqrt{2}) \text{ cm}^2$

e) Déduire alors la valeur de l'intégrale $\int_{-\ln 2}^0 \sqrt{1-e^x} dx$

Exercice 4 (3.5 pts)

1/ On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$ ou (x, y) deux entiers relatifs

- a) Trouver une solution particulière de (E)
- b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)

2/ Soit N un entier naturel telque il existe un couple (a, b) de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

- a) Montrer que le couple $(a, -b)$ est une solution de (E)
 - b) Qu'el est le reste de la division de N par 40
- 3/ a) Résoudre l'équation (E ') : $8x + 5y = 100$, ou (x, y) sont deus entiers relatifs
- b) Un groupe composé de garçons et de filles a déposé 100 dinars dans une salle de jeux les garçons ont dépensé 8 dinars chacun et les filles ont dépensé 5 dinars chacune.
- Combien pouvait –il y avoir d'hommes et de femmes dans ce groupe

Exercice 5 (3pts)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{4 + 3x}$

On considère la suite U définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 4$

- b) Etudier la monotonie de U
- c) En déduire que U est convergente et calculer sa limite

2/ a) Montrer que pour x de $[0,4]$, $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

b) Montrer que pour tout n , $|U_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4}|U_n - 4|$

c) En déduire que pour tout n de \mathbb{N} , $|U_n - 4| \leq 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$ et retrouver la limite de U

