L.S.Nasrallah

Date : Mars 2011

Devoir de contrôle N°2

Classe : 4info
Durée : 2 heures

Prof : Mr.Selmi Samir

Exercice 1 : (3 pts) (QCM)

Cocher la réponse correcte :

1) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

☐ A est non inversible ☐ $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2) a) Soit $f(x) = \ln\left(e^{-x} - 1\right)$ alors le domaine D_f est : ☐IR ☐]0,+∞[☐]-∞,0[

b) La fonction dérivée $f'(x)$ égale à : ☐$\frac{1}{e^{-x}-1}$ ☐$\frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}$ ☐$\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$

Exercice 2 : (4 pts)

1) Déterminer les couples (a,b) d'entiers tels que : 17a = 5b
2) Résoudre dans Z×Z l'équation : $17x - 5y = 1$
3) En déduire les solutions dans Z×Z de l'équation : $17x - 5y = -3$

Exercice 3 : (4 pts)

Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) a) Calculer : M² et A.M

b) Peut-on calculer M.A ? Justifier.

2) a) Montrer que M est inversible.

b) Vérifier que : $M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3) Résoudre alors par calcul matriciel, les systèmes :

$$(S_1)\begin{cases} y + 2z = 5 \\ -x + 3y = 2 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} -3x + 5y + 6z = 1 \\ -x + 2y + 2z = -2 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

Exercice 4 : (3 pts)

1) Montrer que : pour tout $x \in$ IR ; $\frac{1}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

2) En déduire une primitive sur IR de : $x \to \frac{1}{(e^x+1)^2}$

3) Soient $g(x) = \frac{2e^x-2}{e^x+2}$ et $G(x) = 3\ln(e^x + 2) - x$

Montrer que G est une primitive de g sur IR.

Exercice 5 : (6 pts)

1) On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = (1 - x)e^{-x} + 1$

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) En déduire que : $g(x) > 0$, pour tout réel x.

2) Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = xe^{-x} + x$.

a) Montrer que $f'(x) = g(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que la droite D : $y = x$ est une asymptote à ζ_f en +∞. Préciser la position de ζ_f et D.

3) a) Calculer $\lim\limits_{-\infty} \frac{f(x)}{x}$, interpréter.

b) Tracer ζ_f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

4) Soit $F(x) = (ax + b)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$

Déterminer les réels a et b tel que F soit une primitive de f sur IR