Lycée H P Manouba
4éme Inf 2
Année scolaire : 2009-2010

Epreuve de : Mathématiques — Proposé par : Mr BEN ALI

DEVOIR DE CONTROLE N°1

Date : Le 06 /11/ 2009 — Durée : 2 heures

NOM : ……………………………………………….. PRENOM : ……………………………………………
CLASSE : …………………………………………… NUMERO : ……………………………………………

Exercice n°1 :

Cocher la réponse exacte.

1. La limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2^n+3^n}{3^n-2^n}$ en $(+\infty)$ est :

☐ $(+\infty)$ ☐ 1 ☐ -1.

2. Le nombre complexe $Z=(1+i)^6$ est :

☐ un réel ☐ un imaginaire pur . ☐ ni réel ni imaginaire.

3. Si l'équation (E) : $z^2+bz+i=0$ admet $z_0=i$ comme solution dans $\mathbb{C}$ alors le nombre complexe b est égale à :

☐ $1-i$ ☐ $-1-i$ ☐ $1+i$

4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x=3$ alors sa courbe C_f représentative dans un repère orthonormé (0, $\vec{i}$, $\vec{j}$) admet au voisinage de $(+\infty)$ une asymptote d'équation :

☐ $y=x-3$ ☐ $y=x+3$ ☐ $y=-x+3$

Exercice n°2 :

1)Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x+\sin 2x$

a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$; $x-1\le g(x)\le x+1$.

b)En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & \text{si } x>0\\ x^4-x^3+3 & \text{si } x<0\end{cases}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (0, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

a) Montrer que f admet une limite en 0.

b) Montrer que pour tout $x>0$; $\dfrac{x-1}{x}\le f(x)\le\dfrac{x+1}{x}$.

c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interprète géométriquement le résultat

3) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} g\circ f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ g(x)$ et $\lim\limits_{x\to0} f\circ g(x)$

Exercice n°3

Soit u_n la suite définie sur $\mathbb{N}$ par: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n^{\ 2}}{2}} \end{cases}$.

1) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $u_n \geq 1$.

2) a- Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1-u_n^{\ 2}}{2\ u_{n+1} + u_n}$

b- Etudier la monotonie de la suite u_n .

c- Prouver que u_n est convergente puis calculer sa limite.

3) Soit v_n la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n^2 - 1$.

a- Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme .

b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c- Retrouver la limite de u_n quand n tend vers $(+\infty)$.

3) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ puis $S_n' = \sum_{k=0}^{n} (u_k)^2$ en fonction de n .

Exercice n°4

1) a) Ecrire sous-forme algébrique le nombre complexe $U = 1 - i^{\ 2}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) **: z^2 - 3(1 + i) z + 5i = 0**

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$
on considère les points A,B et C d'affixes respectives a = 1+ i, b = 2+i et c = 1+2i
   a) Placer les points A,B et C sur une figure.
   b) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A
   c) Déterminer l'affixe z_D du point D pour que ACDB est un carré.

3) Soit Δ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\left|\dfrac{z-(2+i)}{z-(1+2i)}\right| = 1$

   Déterminer et construire l'ensemble Δ .

FIN