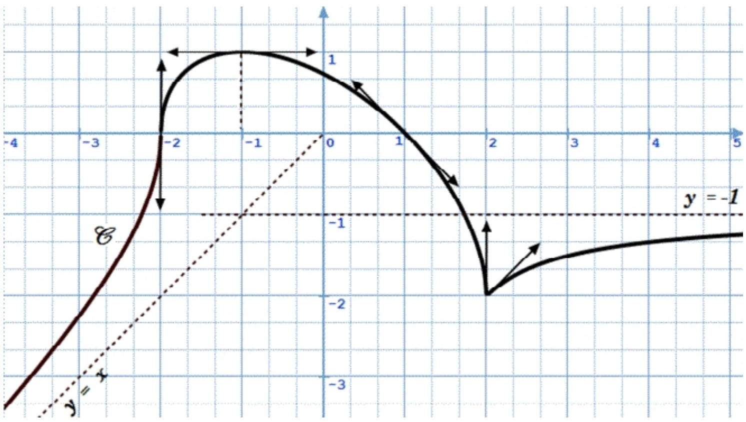
Ministère de l'éducation
****
Lycée Ibn Khaldoun
Sidi Aich

Prof : M. Mahmoudi | Classe : $4^{ème}$ Sc. Info | Date : 12/12/2022 | Durée : 2h

MATHÉMATIQUES
DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 1

Exercice 1 (4 pts)



On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que ses asymptotes au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$ et les tangentes et les demi-tangentes aux points d'abscisses -2; -1; 1 et 2.

Par lecture graphique répondre aux questions suivantes .

1) Déterminer f(-1), f(1) , f'(-1) et f'(1).

2) Donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4) Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable.

5) Dresser le tableau de variations de f.

6) Le point d'abscisse -2 est point d'inflexion pour la courbe de f ? Justifier.

7) Déterminer $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{f(x)+2}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{f(x)+2}{x-2}$.

8) Déterminer $\lim\limits_{x\to(-2)^-} \frac{f(x)}{x+2}$

Exercice 2 (6 pts)

1) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n le nombre $\frac{3n+38}{n+5}$ est-il un entier ?

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de 251139^{142} par 13.

3) Montrer que pour tout entier naturel n le nombre $4^{4n+2}-3^{n+3}$ est divisible par 11.

4)a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste de la division euclidienne de 7^n par 9.

b) En déduire que $2023^{2024} \equiv 4\ [9]$.

5) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 2\ [8]$.

6) Montrer que deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux.

Exercice 3 (5 pts)

1)a) Ecrire $(2+i)^2$ sous forme algébrique

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(z-1)^2 = 3+4i$.

2) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3-2(1+i)z^2-2z+4i-8=0$.

a) Montrer que 2i est une solution de l'équation (E).

b) Montrer que $z^3-2(1+i)z^2-2z+4i-8=(z-2i)\left[(z-1)^2-3-4i\right]$.

c) Résoudre alors l'équation (E).

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'abscisses respectives 2i, −1−i et 3+i.

a) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [BC]. Montrer que $A \in \mathscr{C}$.

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle est isocèle en A ?

c) Placer dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C puis construire le cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 4 (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+4}-x$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer f'(x) et montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2)a) Ecrire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b) Montrer que la droite $\Delta: y=-2x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

3) Tracer $\mathscr{C}$, T et Δ.

4)a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.