Ministère de l'éducation *************** Lycée Ibn Khaldoun Sidi Aich	**Mathématiques** **Devoir de synthèse n°1**		
Prof: M.Mahmoudi	Classe: $4^{ème}$ S.Info	Date: 04/12/2021	Durée: 2h

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} & \text{si } x\in\left]-\infty,2\right[\setminus\{1\}\\ 2x+\sqrt{x^2-4} & \text{si } x\geq 2\end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé .

1) Montrer que f est continue en 2.

2)a) Etudier la limite de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat.

b) f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Justifier.

3)a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que la droite $\Delta : y = 3x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

4)a) Calculer la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et la droite $\Delta' : y = 1$ sur l'intervalle $\left]-\infty,2\right[$

Exercice 2

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de -1752 par 13.

2)a) Montrer que 7^n+1 est divisible par 8 si n est impair .

b) Dans le cas où n est pair donner le reste de la division euclidienne de 7^n+1 par 8.

3) Montrer que $3^{126}+5^{126}$ est divisible par 13.

4) Montrer que pour tout entier naturel n , $4^{4n+2}-3^{n+3}$ est divisible par 11.

Exercice 3

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-\left(3+3i\sqrt{3}\right)z-6+3i\sqrt{3}=0$.

1)a) Vérifier que $i\sqrt{3}$ est une solution de l'équation (E).

b) En déduire l'autre solution de l'équation (E).

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère les points A, B et C d'abscisses respectives $z_A=i\sqrt{3}$, $z_B=3+2i\sqrt{3}$ et $z_C=3-2i\sqrt{3}$.

a) Calculer $\left(z_B-z_A\right)\left(\overline{z_C-z_A}\right)$.

b) En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.

3) Dans la figure la figure de l'annexe ci-jointe, on a placé le point A.

a) Soit D le point d'affixe $z_D=-3$. Montrer que A est le milieu du segment [BD].

b) Placer les points D, B et C.

c) Montrer que l'aire du triangle DCB est $12\sqrt{3}$.

Exercice 4

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2+U_n{}^2}{1+U_n} \end{cases}$

1)a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < U_n < 2$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que (U_n) est convergente.

2)a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2 - U_{n+1} \leq \frac{2}{3}(2 - U_n)$.

b) En déduire , par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Nom et prénom :………………………………………………………………………………………