| Lycée Houmet Souk | Devoir de Synthèse N : 1 | 4 Informatique 1 |
|---|---|---|
| Prof : Loukil Mohamed | Durée : 2 Heures | 17 - 12 - 2020 |

## EXERCICE N : 1 ( 3.5 points )

**Sans justification** , *indiquer la seule réponse correcte pour chacune des questions suivantes .*

**1 )** L'écriture algébrique de $i^{2021}$ est :

**a )** -1 **b )** $i$ **c )** $-i$

**2 )** Le conjugué du nombre complexe $1 - iZ$ est :

**a )** $1 + i\overline{Z}$ **b )** $1 + iZ$ **c )** $1 - i\overline{Z}$

**3 )** Si $|Z - i| = |Z + i|$ alors :

**a )** Z est imaginaire pur **b )** Z est un réel **c )** $Z = 0$

**4 )** Les nombres complexes $Z_1$ et $Z_2$ tels que : $Z_1 + Z_2 = 2i$ et $Z_1 . Z_2 = 1 - i$ sont les solutions de l'équation :

**a )** $Z^2 + 2iZ + 1 - i = 0$ **b )** $Z^2 - 2iZ - 1 + i = 0$ **c )** $Z^2 - 2iZ + 1 - i = 0$

**5 )** Soit ( $U_n$ ) la suite définie sur IN par : $U_n = \dfrac{n(-1)^n}{n^2+1}$ , alors :

**a )** $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ **b )** $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ **c )** ( $U_n$ ) n'a pas de limite

**6 )** Soit $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$ sachant que $f$ est une bijection de $]1 ; +\infty[$ sur $]2 ; +\infty[$ alors :

**a )** $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$ **b )** $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$ **c )** $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$

## EXERCICE N : 2 ( 5 points )

**A ) 1 )** Vérifier que ( 3 - 2 i ) est une racine carrée de ( 5 - 12 i ) .

**2 )** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : **( E )** $iZ^2 + (5 - 2i)Z - (2 + 4i) = 0$ .

**B )** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les point A , B et C d'affixes respectives : $Z_A = i$ , $Z_B = 2 + 4i$ et $Z_C = 4 + i$ .

**1 ) a )** Placer les points A , B et C .

**b )** Montrer que le triangle ABC est isocèle en B .

**2 )** Soit I milieu du segment [ AC ] et D le point d'affixe $Z_D = 2(1 - i)$ .

**a )** Déterminer l'affixe du point I .

**b )** Montrer que les droites ( AC ) et ( BD ) sont perpendiculaires .

**c )** Montrer que ABCD est un losange .

**3 )** Déterminer l'ensemble des points $M_Z$ tels que : $\begin{cases} |Z - 2 - i| = 3 \\ \text{et} \\ |Z - i| = |Z - 4 - i| \end{cases}$

## *EXERCICE N : 3 ( 6 points )*

*Soit la suite réelle ( $U_n$ ) définie sur IN par :* $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+U_n} \end{cases}$

**1 ) a )** *Calculer les termes $U_1$ et $U_2$ .*

**b )** *Justifier que la suite ( $U_n$ ) n'est ni arithmétique et ni géométrique .*

**2 )** *Montrer que pour tout $n \in$ IN on a : $0 < U_n \leq 1$ .*

**3 ) a )** *Montrer que la suite ( $U_n$ ) est décroissante .*

**b )** *Justifier que la suite ( $U_n$ ) est convergente .*

**4 )** *On considère la suite ( $V_n$ ) définie sur IN par : $V_n = \dfrac{1}{U_n}$ .*

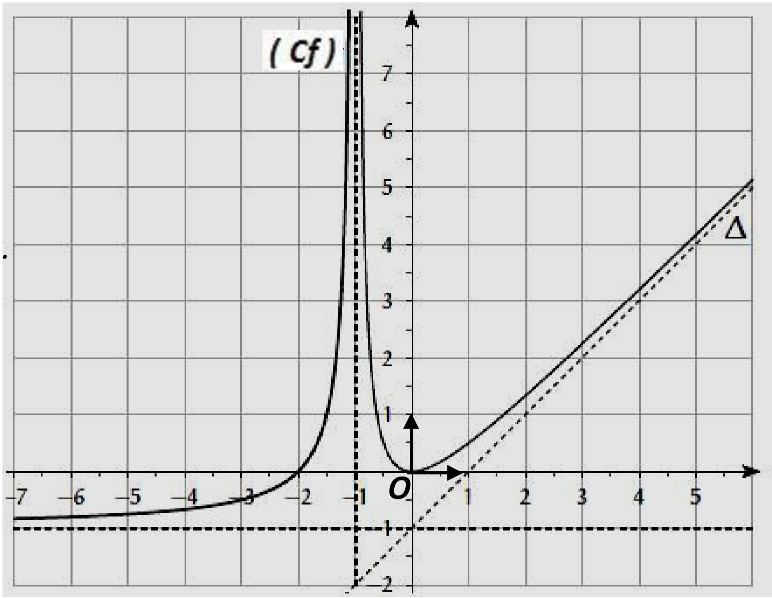
**a )** *Montrer que ( $V_n$ ) est une suite arithmétique .*

**b )** *Exprimer ( $V_n$ ) puis ( $U_n$ ) à l'aide de n .*

**c )** *Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ .*

## *EXERCICE N : 4 ( 5.5 points )*

*La courbe **( Cf )** ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur IR \{ - 1 } .*




**A )** *Par lecture graphique , déterminer :*

**1 )** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x]$ et $f(\,]-\infty\,;-2]\,)$ .

**2 )** *Dresser le tableau de variations de f .*

**3 )** *Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solution(s) de l'équation : f ( x ) = m .*

**4 )** *Soit g la restriction de f sur ] - 1 ; 0 ] .*

*Justifier que g admet une réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle **J** que l'on précisera .*

**B )** *Soit la fonction h définie par : $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ .*

**1 )** *Déterminer le domaine de définition de h .*

**2 )** *Montrer que h est prolongeable par continuité en - 1 .*

# Correction du Devoir de synthèse n : 1

## EXERCICE N : 1 ( 3.5 points )

**1 ) b )** $i^{2021} = i^{505.4+1} = (i^4)^{505}.i = i$ ( 0.5 )

**2 ) a )** $\overline{1-iZ} = 1 + i\overline{Z}$ ( 0.5 )

**3 ) b )** $|Z-i| = |Z+i| \Leftrightarrow |Z-i|^2 = |Z+i|^2 \Leftrightarrow (Z-i)(\overline{Z-i}) = (Z+i)(\overline{Z+i}) \Leftrightarrow (Z-i)(\overline{Z}+i) = (Z+i)(\overline{Z}-i)$

$\Leftrightarrow |z|^2 + i(Z-\overline{Z}) + 1 = |z|^2 - i(Z-\overline{Z}) + 1 \Leftrightarrow 2i(Z-\overline{Z}) = 0 \Leftrightarrow Z = \overline{Z} \Leftrightarrow Z$ est un réel ( 0.5 )

**4 ) c )** $Z_1 + Z_2 = 2i = -\frac{b}{a}$ et $Z_1 . Z_2 = 1 - i = \frac{c}{a}$ donc pour : $a = 1$ , $b = -2i$ et $c = 1 - i$ .

Par suite $Z_1$ et $Z_2$ sont les solutions de l'équation : $Z^2 - 2iZ + 1 - i = 0$ ( 0.5 )

**5 ) a )** $U_n = \frac{n(-1)^n}{n^2+1}$ , alors : $-\frac{n}{n^2+1} \leq U_n \leq \frac{n}{n^2+1}$ pour tout entier naturel $n$

or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{n}{n^2+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ . ( 0.75 )

**6 ) a )** Soit $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$ , $f\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right) = \frac{2\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)^2 - 1} = \frac{2\frac{x}{x-2}}{\frac{x}{x-2}-1} = \frac{\frac{2x}{x-2}}{\frac{x-x+2}{x-2}} = x$ donc $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$ ( 0.75 )

## EXERCICE N : 2 ( 5 points )

**A ) 1 )** $(3-2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$ donc $(3-2i)$ est une racine carrée de $(5-12i)$ . **( 0.5 )**

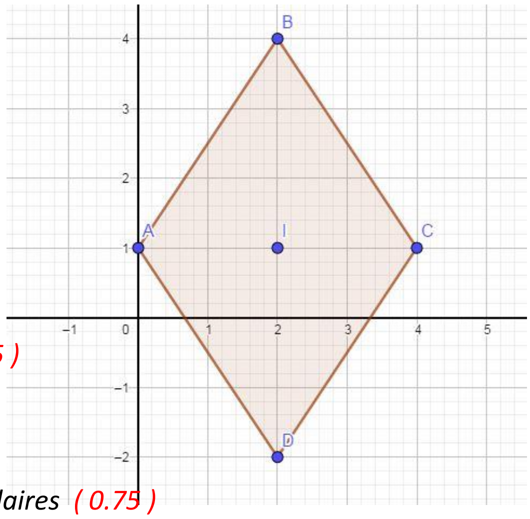
**2 ) ( E )** $iZ^2 + (5-2i)Z - (2+4i) = 0$ ; $\Delta = (5-2i)^2 + 4i(2+4i) = 25 - 20i - 4 + 8i - 16 = 5 - 12i = (3-2i)^2$

les solutions sont $Z' = \frac{-(5-2i)-(3-2i)}{2i} = \frac{-8+4i}{2i} = \frac{(-4+2i)(-i)}{i(-i)} = 4i + 2$

$Z'' = \frac{-(5-2i)+(3-2i)}{2i} = \frac{-2}{2i} = \frac{-(-i)}{i(-i)} = i$ ; $S_{\mathbb{C}} = \{ i , 2+4i \}$ ( 1 )

**B )** $Z_A = i$ , $Z_B = 2 + 4i$ et $Z_C = 4 + i$ .

**1 ) a )** Figure ( 0.5 )




**b )** $AB = |Z_B - Z_A| = |2 + 4i - i| = |2 + 3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$CB = |Z_B - Z_C| = |2 + 4i - 4 - i| = |-2 + 3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$AB = CB \Rightarrow ABC$ est isocèle en B . ( 0.5 )

**2 ) a )** Soit $I$ milieu du segment [ AC ] $\Leftrightarrow Z_I = \frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{i+4+i}{2} = 2 + i$ ( 0.5 )

**b )** $(Z_C - Z_A) . \overline{Z_D - Z_B} = (4 + i - i)(\overline{2 - 2i - 2 - 4i}) = 4 . \overline{-6i} = 24i$

$\Rightarrow (Z_C - Z_A) . \overline{Z_D - Z_B}$ es imaginaire par suite ( AC ) et ( BD ) sont perpendiculaires ( 0.75 )

**c )** aff $(\overrightarrow{AB}) = 2 + 3i$ et aff $(\overrightarrow{DC}) = Z_C - Z_D = 4 + i - 2 + 2i = 2 + 3i$

$\Rightarrow$ aff $(\overrightarrow{AB})$ = aff $(\overrightarrow{DC}) \Rightarrow$ ABCD est un parallélogramme ( A , B et C non alignés )

de plus BA = BC on déduit alors que ABCD est un losange . ( 0.5 )

**3 )** $M_Z$ vérifie le système suivant $\begin{cases} |Z-2-i| = 3 \\ \text{et} \\ |Z-i| = |Z-4-i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IM = 3 \\ \text{et} \\ MA = MC \end{cases} \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(I, 3) \cap Med_{[AC]}$

$\Leftrightarrow M_Z = B$ ou $M_Z = D \Leftrightarrow$ l'ensemble des points $M_Z$ est $\{ B , D \}$ ( 0.75 )

## EXERCICE N : 3 ( 6 points )

**1 ) a )** $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+U_n} \end{cases}$ ; $U_1 = \dfrac{U_0}{1+U_0} = \dfrac{1}{2}$ et $U_2 = \dfrac{U_1}{1+U_1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$ . ( 0.25 ) + ( 0.25 )

**b )** $U_0 + U_2 = \dfrac{4}{3}$ et $2U_1 = 1 \Rightarrow U_0 + U_2 \neq 2U_1$ donc ( $U_n$ ) n'est pas une suite arithmétique . ( 0.5 )

$U_0 . U_2 = \dfrac{1}{3}$ et $(U_1)^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow U_0 . U_2 \neq (U_1)^2$ donc ( $U_n$ ) n'est pas une suite géométrique . ( 0.5 )

**2 )** Montrons que pour tout $n \in IN$ on a : $0 < U_n \leq 1$ .

* Pour $n = 0$ ; $U_0 = 1 \Rightarrow 0 < U_0 \leq 1$ la proposition est vraie

* Supposons que pout tout entier naturel $n$, $0 < U_n \leq 1$ et montrons que $0 < U_{n+1} \leq 1$

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n} = \frac{(1+U_n)-1}{1+U_n} = 1 - \frac{1}{1+U_n} .$$

On a : $0 < U_n \leq 1 \Leftrightarrow 1 < 1+U_n \leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+U_n} < 1 \Leftrightarrow -1 < -\dfrac{1}{1+U_n} \leq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < 1 - \dfrac{1}{1+U_n} \leq \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 < U_{n+1} \leq 1$ , **Conclusion** : Pour tout $n \in IN$ on a : $0 < U_n \leq 1$ . ( 1 )

**3 ) a )** $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n}{1+U_n} - U_n = -U_n\left(1 - \dfrac{1}{1+U_n}\right) = -U_n . U_{n+1} < 0$ ( car $0 < U_n \quad \forall n \in IN$ )

Donc ( $U_n$ ) est une suite décroissante sur IN . ( 0.75 )

**b )** ( $U_n$ )est une suite décroissante sur IN et minorée par 0 donc convergente . ( 0.5 )

**4 )** $V_n = \dfrac{1}{U_n}$ .

**a )** $V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{U_{n+1}} - \dfrac{1}{U_n} = \dfrac{1+U_n}{U_n} - \dfrac{1}{U_n} = \dfrac{1+U_n-1}{U_n} = 1$ donc ( $V_n$ ) est une suite arithmétique de raison $r = 1$ . ( 0.75 )

**b )** * $V_n = V_0 + n\,r = \dfrac{1}{U_0} + n = 1 + n$ . ( 0.5 )

* $U_n = \dfrac{1}{V_n} = \dfrac{1}{n+1}$ . ( 0.5 )

**c )** $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ . ( 0.5 )

## EXERCICE N : 4 ( 5.5 points )

**A )** Par lecture graphique :

**1 )** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = -1$ ( car $\Delta : y = 1x - 1$ ) ( 1 )

$f(\,]-\infty ; -2]\,) = ]-1 ; 0]$ ( 0.5 )

**2 )** Tableau de variations de $f$ . ( 0.75 )

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | ‖ | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**3 ) E )** $f(x) = m$ .

* si $m \in ]-\infty ; -1]$ **E ) n'a pas de solution** .

* si $m \in ]-1 ; 0[$ **E )** admet **une** solution .

* si $m = 0$ **E )** admet **deux** solutions .

* si $m \in ]0 ; +\infty[$ **E )** admet **trois** solutions . ( 1 )

**4 )** $g(x) = f(x)$ avec $D_g = ]-1 ; 0]$ .

D'après le graphique g est continue e strictement décroissante sur $]-1 ; 0]$ donc elle admet une réciproque $g^{-1}$ définie sur $f(\,]-1 ; 0]\,) = [0 ; +\infty[$ . ( 0.75 )

**B )** $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ .

**1 )** $D_h = \{ x \in D_f$ tels que $f(x) > 0 \} = \{ x \in IR \setminus \{-1\}$ tels que $-2 < x$ et $x \neq 0 \} = ]-2 ; +\infty[ \setminus \{-1 , 0\}$ . ( 0.75 )

**2 )** h est définie au voisinage de $-1$ ,

$\lim\limits_{x\to-1} h(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}} = 0 \in IR$ **[ car :** $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$ **]**

Donc h est prolongeable par continuité en $-1$ . ( 0.75 )