Lycée secondaire Ibn Aarafah Ht Souk **Djerba**	**Devoir de Synthèse n° 2**	
	Durée :**3h**	Année scolaire : 2019-2020
Prof : Mr . Saâfi Rochdi	**4° Sciences Info.**	Date : 05-03-2020

Exercice n° 1 (9 points)

A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

1°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) interpréter graphiquement ces résultats.

2°) a) Montrer que : $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

b) Dresser alors le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

3°) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-1\,,1\,[$.

b) Montrer que pour tout $x \in\,]-1\,,1[$ on a : $f^{-1}(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

B/ Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2\,U_n}{1+(U_n)^2} \end{cases}$

1°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le U_n < 1$.

2°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1-U_n)(1+U_n)}{1+(U_n)^2}$.

b) Déduire que U est croissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{2} \le U_n < 1$.

c) Montrer que U est convergente.

3°) Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = ln\left(\frac{1+U_n}{1-U_n}\right)$.

a) Montrer que V est géométrique de raison 2.

b) Déterminer, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

c) Justifier que : $U_n = f(V_n)$.

d) Déterminer, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 2 :(6.5pts)

A) Soit la fonction g définie sur $]-1,+\infty[$ par : $g(x)=(1+x)^2-1+\ln(1+x)$

1°) a) Montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$ on a $g'(x)=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$

b) Déduire le sens de variations de g

2°) Calculer $g(0)$ et déduire le signe de $g(x)$

B) On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x)=x-\frac{\ln(1+x)}{1+x}$

On note par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan

1°) Calculer $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat

2°) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) Montrer que la droite $\Delta : y=x$ est une asymptote à (C_f)

3°) Étudier la position relative de Δ et (C_f)

4°) a) Montrer que : $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Déterminer la tangente T à (C_f) qui est parallèle à Δ .

d) Tracer Δ et (C_f)

5°) Calculer : $\int_1^e f(x)dx$.

Exercice n°3 : (5 points)

Soit $I_0=\int_1^e x\,dx$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $I_n=\int_1^e x(Lnx)^n dx$.

1°) Calculer I_0.

2°) a) A l'aide d'une intégration par parties, Calculer I_1 .

b) A l'aide d'une intégration par parties, Montrer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $I_{n+1}=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{n+1}{2}\right)I_n$

c) Calculer, alors, I_2 .

3°) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

b) Montrer que : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $0\le I_n\le\frac{e^2}{n+1}$

c) Montrer que la suite (I_n) est convergente et calculer sa limite.