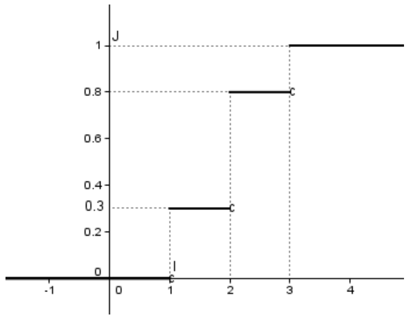
2013/2014
DEVOIR DE SYNTHESE N3
MATHEMATIQUES

3 heures

Le sujet comporte cinq exercices répartis en trois pages

EXERCICE 1 : (2 points)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule des trois réponses est exacte. Indiquez sur votre copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.



1) Dans le graphique ci-contre on a représenté dans un repère orthogonal (O,I,J) la fonction de répartition F d'une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un univers Ω.
Alors p(X=2) est égale à :
a) 0,8 b) 0,5 c) 0,3

2) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'intervalle [1,5], qui suit une loi de probabilité uniforme. Alors p(X>4) est égale à :
a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) 0

3) Le plan étant muni d'un repère orthonormé. Soit P la partie du plan limitée par la courbe de la fonction $\boldsymbol{f} : \mathbf{x} \longmapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ et $\mathbf{x} = e$.
Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la partie P autour de l'axe des abscisses. Alors V (exprimé en unité de volume) est égal à :
a) $\frac{\pi}{3}$ b) π c) $\frac{\pi.e}{3}$

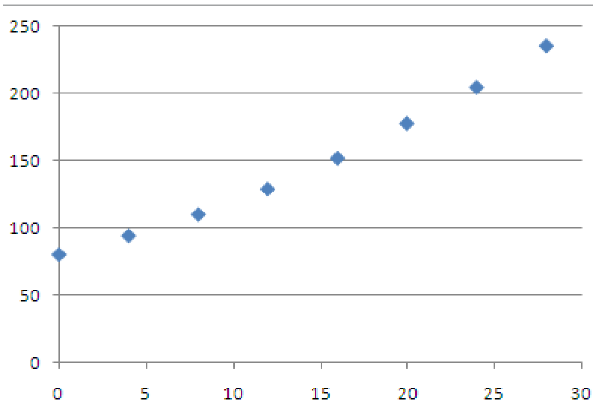
4) Soit la suite (u_n) définie sur IN* par $u_n = \ln\left(\frac{1}{n} + ne^{-n}\right)$. Alors $\lim_{n \to +\infty} u_n$ est égale à :
a) 0 b) $+\infty$ c) $-\infty$

EXERCICE 2 : (3 points)

Dans une région de 1000 Km², la superficie des terrains urbanisés entre 1970 et 1998 est donné par le tableau suivant :

Année	1970	1974	1978	1982	1986	1990	1994	1998
Rang de l'année : X	0	4	8	12	16	20	24	28
Superficie en Km² : Y	80	94	110	129	152	178	205	236
Z = ln(Y)	4,38	4,54	4,70	4,86	5,02	5,18	5,32	5,46

Le nuage de points associé à la série statistique (X, Y) est représenté ci-contre :



■ Les estimations des superficies demandées dans l'exercice seront données en Km^2 et arrondies à l'unité.

1) a) Donner le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique (X, Y), arrondi à 10^{-2} prés.

b) Un ajustement affine de Y en X est-il possible ? Justifier.

c) Déterminer un ajustement affine de Y en X par la méthode de Mayer.

d) En déduire une estimation E_1 de la superficie des terrains urbanisés en 2010.

2) Le nuage de points associé à la série (X, Y) permet aussi d'envisager **un ajustement de type exponentiel.**

On pose Z=ln(Y). Les valeurs de Z sont données dans le tableau considéré arrondies à 10^{-2} prés.

a) Donner le coefficient de corrélation linéaire r' de la série statistique (X, Z) arrondi à 10^{-4} prés.

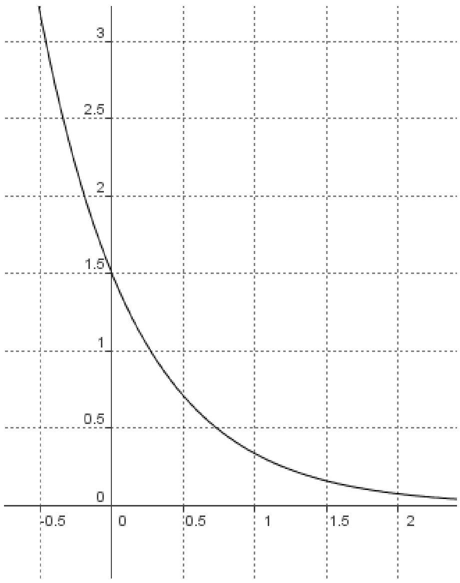
b) Déterminer un ajustement affine de Z en X par la méthode des moindres carrés.

c) En déduire une estimation E_2 de la superficie des terrains urbanisés en 2010.

<u>EXERCICE 3 :</u> (5 points)

A/ Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. ($\lambda > 0$)

La courbe ci-contre représente la fonction densité f associée à X ($f: t \longmapsto \lambda e^{-\lambda t}$)



1) Interpréter graphiquement la probabilité p(X≤ 1).

2) Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

B/ Une machine-outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart X, en dixième de millimètre, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre λ =1,5.

- Si l'écart X≤ 1, alors le cylindre est accepté.
- Si l'écart 1 ≤X≤2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80% des cas.
- Si l'écart X≥2, alors le cylindre est refusé.

■ On prélève au hasard un cylindre dans la production.

1) Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est sensiblement égale à 0,915.

2) Sachant qu'il est accepté. Quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?

3) On considère un lot de dix cylindres, pour mesurer à chacun l'écart X. On suppose que ces mesures s'effectuent de façon indépendante.

Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit accepté ?

C/ Le temps d'attente (exprimé en années) de la première panne de cette machine-outil suit la loi exponentielle de paramètre 0,1.

1) Calculer la probabilité que cette machine-outil fonctionne six mois.

2) Sachant que cette machine outil n'a pas eu de panne durant six mois. Calculer la probabilité quelle fonctionne encore pendant au moins deux ans.

EXERCICE 4 : (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$ on a : $u_n > 1$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ .

2) on désigne par (v_n) et (w_n) les suites définies sur IN par :

$v_n = \frac{-1+u_n}{u_n}$ et $w_n = \ln(v_n)$

a) Calculer w_0

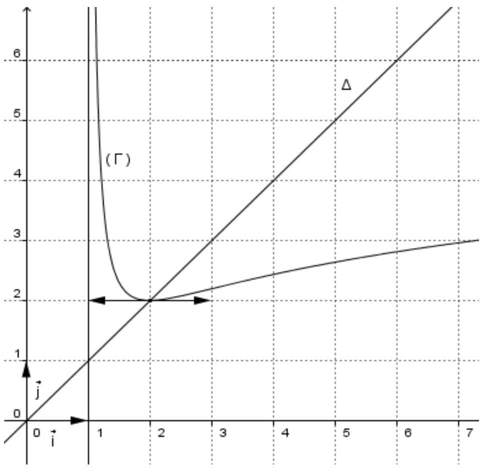
b) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $v_{n+1} = (v_n)^2$

c) En déduire que la suite (w_n) est géométrique dont on précisera la raison .

d) Exprimer w_n puis u_n à l'aide de n.

e) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 5 : (6 points)



A/ Dans le graphique ci-contre, la courbe (Γ) est celle de la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=\frac{ax}{x-1}+b.\ln(x-1)$ et la droite Δ est d'équation y=x.

L'unique tangente horizontale à la courbe (Γ) est au point A(2,2)

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) En se servant des valeurs de g(2) et g'(2), montrer que a=b=1

3) a) Montrer que $\int_2^{e+1} \frac{x}{x-1} dx = e$

b) Calculer (en unité d'aire) l'aire de la partie du plan limitée par (Γ), Δ et les droites d'équation x=2 et x=e+1

B/ Soit la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=x\ln(x-1)$. On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O', \vec{u}, \vec{v})$.

1) Montrer que pour tout réel x de $]1,+\infty[$ on a : $f'(x)=g(x)$.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

4) Montrer que le point I(2,0) est un point d'inflexion de (C).

5) Tracer la courbe (C).

C/ Soit la suite (I_n) définie sur IN* par : $I_n = \int_2^e x^n \ln(x-1)\, dx$

1) a) Interpréter géométriquement le terme I_1.

b) Vérifier que $\frac{x^2}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$ pour tout réel $x \neq 1$

c) Calculer le terme I_1.

2) a) Montrer que pour tout réel x de [2,e] et pour tout $n \in$ IN* on a : $0 \leq x^n \ln(x-1) \leq x^n$

b) En déduire que pour tout $n \in$ IN* on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\int_2^e \left(\frac{x}{e}\right)^n \ln(x-1)\, dx\right)$

Bon travail