Direction régionale de l'éducation de Monastir
Lycée Ali Bourguiba Bembla

Devoir de synthèse n °3

Proposé par :

- Mosrati chawki
- Aguech mabrouk

16 Mai 2011

Matière : Mathématiques | Niveau : 4ème Année

Section : Sciences techniques

Durée de l'épreuve : - 3 heures
- Coefficient 3

Ce sujet comporte 4 pagres numérotées de 1 à 4

La page n °4 est à rendre avec les copies

L'usage d'une calculatrice est autorisé

Les élèves doivent traiter les 4 exercices .
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

Exercice : 1(3 pts)

I/ *Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. L'élève indiquera sur sa copie la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

1) $\int_{-1}^{1} te^{\cos t}\, dt$ est :

a) Strictement positive b) Strictement négative c) Nulle.

2) La fonction : x --> $\int_{-1}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$ est définie sur :

a)[1 ,+∞ [b) 1,+∞ [c) IR

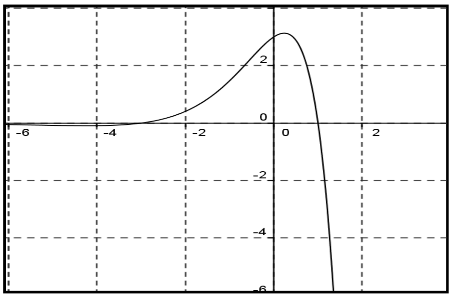
3) La dérivée de la fonction $x \mapsto 3^x$ est la fonction

a) $x \mapsto x3^{x-1}$ b) $x \mapsto 3^x Ln3$ c) $x \mapsto e^{xLn3}$

4) La valeur moyenne sur [0, 1] de la fonction f définie sur R par f (x) = xe^{1-x^2} est:

a) 1 b) $\frac{e-1}{2}$ c) e – 1

5) La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie sur IR et admet au voisinage de +∞ une branche parabolique de direction (y y') .



$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$

a) 0 b) +∞ c)-∞

6) On considère la sphère S de centre Ω(1,-2,1) et de rayon $\frac{2}{3}\sqrt{5}$ et la droite D : $\begin{cases} x=\alpha+1 \\ y=2\alpha \\ z=-2\alpha+1 \end{cases}$;$\alpha\in IR$ alors l'intersection de D et S est :

a) un point b) deux points c) Ø

Exercice :2(5 pts)

On considère dans l'espace muni du repère orthonormé direct $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points A (2,0, 3); B (3,2,0) ,C (2,3,0) et D (2,2,3)

1) a) Calculer le produit vectoriel: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$; en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

B) Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : x + y + z -5 = 0.

C) Vérifier que ABCD est un tétraèdre puis calculer son volume V.

2) Soit S l'ensemble des points M (x, y, z) tels que : $X^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 3 = 0$.

Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

3) Montrer que le tétraèdre ABCD est inscrit dans la sphère S.

4) Soit C le cercle circonscrit au triangle ABC; Déterminer le centre fi et le rayon r du cercle C.

Exercice :3 (4 pts)

Pour tout n de IN*, on considère l'intégrale : $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1/ a- Démontrer que pour tout x de]1 ; e [et pour tout n de IN, on a $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.

b- En déduire que la suite (I_n) est décroissante .

2/ a- Calculer I_1.

b- Démontrer à l'aide d'une intégration par partie que pour tout n de IN* : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

c- En déduire I_2.

3/ a- Démontrer que, pour tout n de IN* , $I_n \geq 0$.

b- Démontrer que, pour tout n de IN*, $(n + 1)I_n \leq e$.

c- En déduire la limite de I_n.

Exercice :4 (8 pts)

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormale $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$; on prendra 2cm comme unité sur les deux axes .

I/ On considère la fonction f, définie sur]0 ; +∞[par : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x \ - 2)$

On désigne par C sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en + ∞ et 0.
2. Soit g la fonction définie sur]0 ; +∞[par g(x) = lnx + x - 3.
   - a- Étudier les variations de g.
   - b- Montrer que l'équation g(x) = 0 possède une solution unique $\alpha \in]0 ; +\infty[$ et que $2.20 < \alpha < 2.21$.
   - c- Étudier le signe de g(x) sur]0 ; +∞[
3. a- Montrer que f est dérivable sur]0 ; +∞[et que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
   - b- Dresser le tableau de variation de f.
   - c- Montrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.
   - d- En déduire que $-0.65 < f(\alpha) < -0.66$.
4. a- Étudier le signe de f(x).
   - b- Tracer $\mathscr{C}$.
5. Soit h la restriction de f sur]0 ; ∝].
   - a- Montrer que h est une bijection de]0 ; ∝] dans un intervalle que l'on déterminera.
   - b- Tracer la courbe de h dans le même repère.
6. a- Montrer que $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$.
   - b- Montrer que $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = 2$.
   - c- Calculer en cm² l'aire du domaine limité par la courbe ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = e².

Prof: Mosrati+Aguech	Sujet proposé (2011)	DEVOIR DE SYNTHESE N:3
SECTION : SCIENCES TECHNIQUES		
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DUREE : 3 heures	COEFFICIENT : 3

Feuille à rendre

Nom :…………………………………… **Prénom** :………………………………………. **Classe** : 4 Technique : ….

Question :1	Question :2	Question :3	Question :4	Question :5	Question :6