Lycée secondaire : Ali Bourguiba Kalâa Kbira		**Année scolaire** : 2010-2011
Epreuve : Mathématiques	**Devoir de Synthèse n° 3**	**Durée** : 3 heures
Professeur : Maâtallah	**Date** : Le 16-05-2011	**Classe** : 4 Tec $_2$

Exercice n°1 :(3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est correcte . Relever cette réponse .

1) Soit α un réel strictement positif . $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x^4+x^{10}+\sin(2x)}{1+x^6}\,dx$ est égale à :

   a) $\frac{1}{5}\alpha^5$ b) $\frac{4}{5}\alpha^5$ c) $\frac{2}{5}\alpha^5$

2) si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace tels que : $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u}\,.\,\vec{v} = -6$. Alors :

   a) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \frac{12}{\sqrt{3}}$ b) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 12\sqrt{3}$ c) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 6\sqrt{3}$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$.

   a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ b) $f'(x) = 1 + \frac{2}{1+2x^2}$ c) $f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1+x^2}$

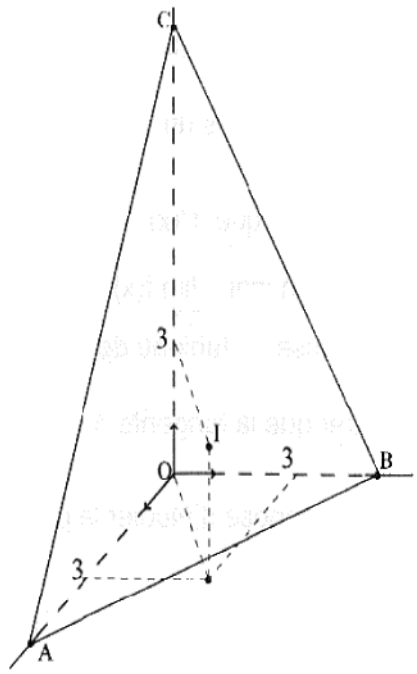
4) une primitive sur $[0\,,\frac{\pi}{2}[$ de la fonction : $x \mapsto -\tan(x)$ est la fonction :

   a) $-ln\left(\frac{1}{sinx}\right)$ b) $-ln\,(sinx)$ c) $-ln\left(\frac{1}{cosx}\right)$

Exercice n°2 : (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Dans la figure ci-contre OABC est un tétraèdre tel que $\overrightarrow{OA} = 5\,\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OB} = 5\,\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OC} = 10\,\vec{k}$ et I est le point de coordonnées (3,3,3) .



1) a) Vérifier que le plan (ABC) a pour équation : $2x + 2y + z - 10 = 0$.

   b) Ecrire une équation du plan P médiateur du segment $[OC]$.

   c) Donner une représentation paramétrique de la droite $\Delta = P \cap (ABC)$.

2) Soit S la sphère de centre I et de rayon 3 .

   a) Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC) suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon .

   b) Montrer que S est tangente aux plans (OAB) , (OAC) et (OBC) .

3) Soit S_1 la sphère passant par A et B et dont le centre est un point de Δ .

   Déterminer une équation cartésienne de S_1 .

Exercice n°3 : (6 points)

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{1+{U_n}^2}{2U_n}$.

1) a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $1 \le U_n \le 2$.

   b) Etudier la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite .

2) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - 1 \le \frac{1}{2}(U_n - 1)$ et que : $U_n \le 1 + (\frac{1}{2})^n$. Retrouver $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

3) Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+1}$ et $W_n = ln\left(1 - \frac{2}{U_n+1}\right)$.

   a) Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et que $U_n = \frac{1+e^{W_n}}{1-e^{W_n}}$ puis retrouver $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

   b) Exprimer en fonction de n le produit $P_n = V_0.V_1 \ldots\ldots\ldots.V_n$. Calculer $\lim_{\to+\infty} P_n$.

Exercice n°4 : (6 points)

1) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

a) Dresser le tableau de variations de g.

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0,+\infty[$ une unique solution α .
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α. Déterminer le signe de $g(x)$.

c) Démontrer que $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$.

2) Soit h la fonction définie et dérivable sur $[0,+\infty[$ telle que $h(x) = \frac{4x}{e^x+1}$.

a) Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, $h'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

b) Déduire les variations de la fonction h sur $[0,+\infty[$.

3) On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{4}{e^x+1}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

a) Etudier f et tracer C_f .

b) Soit $M(x, f(x))$, $P(x,0)$ et $Q(0, f(x))$. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α . Le point M a pour abscisse α . La tangente (T) en M à la courbe (C_f) est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) et les droites d'équations : $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$

Bonne chance et excellente réussite au Baccalauréat